1ère

Mathématiques Enseignement Scientifique

Suites Géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SUITE À PARTIR D'UNE SUITE... 5

CORRECTION

1. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique:

Nous savons que pour tout entier naturel n:
- $U_{n+1} = 2\ U_n + 1$
- $V_n = U_n + 1$.

Dans ces conditions: $U_{n+1} = 2\ U_n + 1 \iff U_{n+1} + 1 = (2\ U_n + 1) + 1$

$\iff V_{n+1} = 2\ (U_n + 1)$

$\iff V_{n+1} = 2\ V_n$.

Ainsi: la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_1 = U_1 + 1 = 2$.

1. b. Donnons l'expression de V_n en fonction de n:

Comme (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $V_1 = 2$: $V_n = 2 \times (2)^{(n-1)}, n \in \mathbb{N}^*$. $(V_n = V_1 \times q^{(n-1)})$

1. c. Déduisons-en U_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $V_n = U_n + 1 \iff U_n = V_n - 1$.

D'où: $U_n = 2 \times (2)^{(n-1)} - 1$ ou $U_n = 2^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminons le sens de variation de (U_n):

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$U_{n+1} - U_n = (2^{(n+1)} - 1) - (2^n - 1)$

$= 2^{(n+1)} - 2^n$

$= 2 \times (2^n) - 2^n$

$= 2^n \times (2 - 1)$

$= 2^n$.

Comme $U_{n+1} - U_n = 2^n > 0$: la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

3. Conjecturons la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 2^n - 1$.

Or: $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

Donc: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$: la suite (U_n) est divergente.