www.freemaths.fr

1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Suites Géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SUITE À PARTIR D'UNE SUITE...

3

CORRECTION

1. Montrons que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} + V_{n+1} = U_n + V_n = 1$:

$U_{n+1} + V_{n+1} = -2\,U_n + V_n + 3\,U_n = U_n + V_n$.

Dans ces conditions:
- $U_n + V_n = U_{n-1} + V_{n-1}$
- $U_{n-1} + V_{n-1} = U_{n-2} + V_{n-2}$

.

.

.

- $U_1 + V_1 = U_0 + V_0$.

D'où: $U_{n+1} + V_{n+1} = U_n + V_n = U_{n-1} + V_{n-1} = ... = U_1 + V_1 = U_0 + V_0 = 1$.

Au total, pour tout entier naturel n, nous avons bien: $U_{n+1} + V_{n+1} = U_n + V_n = 1$.

2. Déduisons-en que $U_{n+1} = -3\,U_n + 1$:

Pour tout entier naturel n: $U_n + V_n = 1$.

D'où: $V_n = 1 - U_n$.

Et par conséquent: $U_{n+1} = -2\,U_n + V_n \iff U_{n+1} = -2\,U_n + (1 - U_n)$.

Ainsi, pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = -3\,U_n + 1$.

3. La suite (t_n) est-elle géométrique ?

Nous savons que pour tout entier naturel n:
- $U_{n+1} = -3\,U_n + 1$, avec $U_0 = \frac{1}{4}$
- $t_n = U_n - \frac{1}{4}$.

Dans ces conditions: $U_{n+1} = -3\,U_n + 1 \iff U_{n+1} - \frac{1}{4} = \left(-3\,U_n + 1\right) - \frac{1}{4}$

$$\iff t_{n+1} = -3\left(U_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$\iff t_{n+1} = -3\,t_n.$$

Ainsi, la suite (t_n) est une suite géométrique de raison $q = -3$ et de premier terme $t_0 = U_0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$: $t_n = -\frac{1}{4} \times (-3)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

4. Déduisons-en U_n et V_n en fonction de n:

a. En ce qui concerne U_n:

Pour tout entier naturel n: $U_n = t_n + \frac{1}{4}$.

D'où: $U_n = -\frac{1}{4} \times (-3)^n + \frac{1}{4},\ n \in \mathbb{N}$.

b. En ce qui concerne V_n:

Pour tout entier naturel n: $V_n = 1 - U_n$.

D'où: $V_n = \frac{1}{4} \times (-3)^n + \frac{3}{4},\ n \in \mathbb{N}$.