

Mathématiques

Enseignement Scientifique

Suites Géométriques



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE SUITE À PARTIR D'UNE SUITE...

1

CORRECTION

1. (U_n) est-elle une suite géométrique ?

D'après le cours, une suite (U_n) est géométrique ssi pour tout entier naturel n :

a. elle s'écrit sous la forme $U_n = U_0 \times q^n$

b. $\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_1} = \dots = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n+1}}{U_n}$, avec $U_0 \neq 0$.

a. Exprimons U_{n+1} en fonction de U_n :

$$\begin{aligned}U_{n+1} &= x_{n+1} + \frac{1}{2} \\ &= (3x_n + 1) + \frac{1}{2} \\ &= 3 \left(x_n + \frac{1}{2} \right).\end{aligned}$$

Ainsi: $U_{n+1} = 3 U_n$ car $U_n = x_n + \frac{1}{2}$.

De plus, comme $U_0 = x_0 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$, nous pouvons aussi écrire: $U_n = \frac{15}{2} \times 3^n$.

$$b. \frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \dots = \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n} ?$$

$$\text{Ici: } u_0 = \frac{15}{2}, u_1 = \frac{45}{2} \text{ et } u_2 = \frac{135}{2}.$$

$$\text{Dans ces conditions: } \frac{u_1}{u_0} = 3, \frac{u_2}{u_1} = 3, \dots, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3$$

$$\text{et donc: } \frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \dots = \frac{u_{n+1}}{u_n} = 3.$$

Au total, la suite (u_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = \frac{15}{2}$: $u_n = \frac{15}{2} \cdot 3^n, n \in \mathbb{N}$.

2. Déduisons-en x_n en fonction de n :

$$\text{Nous savons que: } u_n = x_n + \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où: } x_n = u_n - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi: } x_n = \frac{15}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{2}, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

La suite (x_n) est dite: suite arithmético-géométrique.