1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Suites Géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE SOMMES

CORRECTION

1. Rappelons la formule demandée:

D'après le cours, pour tout entier naturel n non nul et $q \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}.$$

2. Calculons S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5:

Pour ce faire, nous allons avoir recours à la formule de la question précédente.

a. $S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n}$:

Ici: $q = \frac{1}{3}$.

Dans ces conditions: $S_1 = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}}{1 - \frac{1}{3}}.$$

D'où: $S_1 = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)}\right)$.

b. $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$:

Ici: $q = \frac{1}{2}$.

Dans ces conditions: $S_2 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}.$$

D'où: $S_2 = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

c. $S_3 = 5 + 10 + 15 + 20 + ... + 70$:

Ici, nous n'allons pas appliquer la formule de la question précédente, mais la formule: $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

En effet: $S_3 = 5\,(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 14)$

$$= 5 \times \left(\frac{14 \times (14 + 1)}{2}\right).$$

D'où: $S_3 = 525$.

d. $S_4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{3^{n-2}}$:

Ici: $q = \frac{1}{3}$.

Dans ces conditions: $S_4 = \left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right] - 1$

$$= \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{(n-2+1)}}{1 - \frac{1}{3}}\right] - 1.$$

D'où: $S_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-1)}$.

e. $S_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ... + \frac{1}{16384}$:

Ici: $q = \frac{1}{4}$.

Dans ces conditions: $S_5 = \left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^7\right] - 1$

$(16384 = 4^7)$

$$= \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^8}{1 - \frac{1}{4}}\right] - 1.$$

D'où: $S_5 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^8$ ou $S_5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^7$.