1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Taux de Variation

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRE DÉRIVÉ DE $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ EN " a "

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- le taux de variation ou **taux d'accroissement** de f entre a et $b = a + h$ ($h \neq 0$) est: $\mathcal{T}(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$,
- f est dérivable en " a " ssi: $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \ell$, ℓ **étant un nombre réel fini,**
- le nombre dérivé de f en " a " est: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h)$.

1. $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $a = 1$:

a. • **L'ensemble de définition**:

Il faut que: $x + 4 \geqslant 0$ <=> $x \geqslant -4$.

L'ensemble de définition est donc: $Df = [-4 ; +\infty[$.

• **L'ensemble de dérivabilité**:

Il faut que: $x + 4 > 0$ <=> $x > -4$.

L'ensemble de dérivabilité est donc: $Df' =]-4 ; +\infty[$.

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et $a+h$:

Ici: $a = 1 \in [-4 ; +\infty[$ et $a + h = 1 + h \in [-4 ; +\infty[$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{5+h} - \sqrt{5}) \times (\sqrt{5+h} + \sqrt{5})}{h \times (\sqrt{5+h} + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{(5+h) - (5)}{h \times (\sqrt{5+h} + \sqrt{5})}$$

$((a-b)(a+b) = a^2 - b^2)$

$$= \frac{1}{(\sqrt{5+h} + \sqrt{5})}.$$

Ainsi, le taux de variation entre 1 et $1+h$ est: $\tau(h) = \dfrac{1}{(\sqrt{5+h} + \sqrt{5})}$.

c. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{5+h} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

D'où: $\displaystyle\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = 1$ et précisons la valeur de $f'(1)$:

• Comme $\displaystyle\lim_{h \to 0} \tau(h) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = 1$.

• La valeur de $f'(1)$ est: $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

2. $f(x) = \sqrt{-3x + 10}$ et $a = 2$:

a. • L'ensemble de définition:

Il faut que: $-3x + 10 \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{10}{3}$.

L'ensemble de définition est donc: $Df =]-\infty; \frac{10}{3}]$.

• L'ensemble de dérivabilité:

Il faut que: $-3x + 10 > 0 \iff x < \frac{10}{3}$.

L'ensemble de dérivabilité est donc: $Df' =]-\infty; \frac{10}{3}[$.

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et a + h:

Ici: $a = 2 \in]-\infty; \frac{10}{3}]$ et $a + h = 2 + h \in]-\infty; \frac{10}{3}]$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$$= \frac{\sqrt{-3(2+h) + 10} - \sqrt{-3 \times 2 + 10}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{-3h + 4} - \sqrt{4}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{-3h + 4} - \sqrt{4}) \times (\sqrt{-3h + 4} + \sqrt{4})}{h \times (\sqrt{-3h + 4} + \sqrt{4})}$$

$$= \frac{(-3h + 4) - (4)}{h \times (\sqrt{-3h + 4} + \sqrt{4})}$$

$((a-b)(a+b) = a^2 - b^2)$

$$= \frac{-3}{\sqrt{-3h+4}+\sqrt{4}}.$$

Ainsi, le taux de variation entre 2 et 2 + h est: $\tau(h) = \frac{-3}{\sqrt{-3h+4}+\sqrt{4}}.$

c. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{\sqrt{-3h+4}+\sqrt{4}} = \frac{-3}{4}.$$

D'où: $\lim_{h \to 0} \tau(h) = -\frac{3}{4}.$

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = 2$ et précisons la valeur de $f'(2)$:

- Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = -\frac{3}{4}$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = 2$.
- La valeur de $f'(2)$ est $f'(2) = -\frac{3}{4}.$

3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ et $a = 3$:

a. • L'ensemble de définition:

Il faut que: $x^2 + 3 \geqslant 0$, ce qui est toujours vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de définition est donc: $Df = \mathbb{R}$.

• L'ensemble de dérivabilité:

Il faut que: $x^2 + 3 > 0$, ce qui est toujours vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble de dérivabilité est donc: $D_{f'} = \mathbb{R}$.

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et a + h:

Ici: $a = 3 \in \mathbb{R}$ et $a + h = 3 + h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$$= \frac{\sqrt{(3+h)^2 + 3} - \sqrt{3^2 + 3}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{h^2 + 6h + 12} - \sqrt{12}}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{h^2 + 6h + 12} - \sqrt{12}) \times (\sqrt{h^2 + 6h + 12} + \sqrt{12})}{h \times (\sqrt{h^2 + 6h + 12} + \sqrt{12})}$$

$$= \frac{(h^2 + 6h + 12) - (12)}{h \times (\sqrt{h^2 + 6h + 12} + \sqrt{12})}$$

$((a - b)(a + b) = a^2 - b^2)$

$$= \frac{h + 6}{(\sqrt{h^2 + 6h + 12} + \sqrt{12})}.$$

Ainsi, le taux de variation entre 3 et 3 + h est: $\tau(h) = \dfrac{h + 6}{(\sqrt{h^2 + 6h + 12} + \sqrt{12})}$.

c. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{h + 6}{(\sqrt{h^2 + 6h + 12} + \sqrt{12})} = \frac{6}{2\sqrt{12}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}}.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \dfrac{3}{2\sqrt{3}}$.

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = 3$ et précisons la valeur de $f'(3)$:

• Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = 3$.

• La valeur de $f'(3)$ est $f'(3) = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 25}$ et $a = 4$:

a. • L'ensemble de définition:

Il faut que: $-x^2 + 25 \geqslant 0$ <=> $x^2 \leqslant 25$ cad $x \geqslant -5$ ou $x \leqslant 5$.

L'ensemble de définition est donc: $Df = [-5; 5]$.

• L'ensemble de dérivabilité:

Il faut que: $-x^2 + 25 > 0$ <=> $x^2 < 25$ cad $x > -5$ ou $x < 5$.

L'ensemble de dérivabilité est donc: $Df' =]-5; 5[$.

b. Exprimons, en fonction de h, le taux de variation de f entre a et a + h:

Ici: $a = 4 \in [-5; 5]$ et $a + h = 4 + h \in [-5; 5]$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$$= \frac{\sqrt{(-4+h)^2 + 25} - \sqrt{-(4)^2 + 25}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{-h^2 - 8h + 9} - 3}{h}$$

$$= \frac{(\sqrt{-h^2 - 8h + 9} - 3) \times (\sqrt{-h^2 - 8h + 9} + 3)}{h \times (\sqrt{-h^2 - 8h + 9} + 3)}$$

$$= \frac{(-h^2 - 8h + 9) - (9)}{h \times (\sqrt{-h^2 - 8h + 9} + 3)}$$

$((a - b)(a + b) = a^2 - b^2)$

$$= \frac{-h - 8}{(\sqrt{-h^2 - 8h + 9} + 3)}.$$

Ainsi, le taux de variation entre 4 et 4 + h est: $\mathcal{T}(h) = \dfrac{-h - 8}{(\sqrt{-h^2 - 8h + 9} + 3)}$.

c. Calculons la limite de $\mathcal{T}(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-h - 8}{\sqrt{-h^2 - 8h + 9} + 3} = \frac{-8}{2 \times 3} = \frac{-4}{3}.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \dfrac{-4}{3}$.

d. Déduisons-en que f est dérivable en $a = 4$ et précisons la valeur de $f'(4)$:

- Comme $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \dfrac{-4}{3}$ (nombre réel fini): f est dérivable en $a = 4$.

- La valeur de $f'(4)$ est $f'(4) = \dfrac{-4}{3}$.