

Mathématiques

Enseignement Scientifique

Taux de Variation



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA FONCTION RACINE CARRÉE

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- le taux de variation ou **taux d'accroissement** de f entre a et $b = a + h$

$$(h \neq 0) \text{ est: } \mathcal{T}(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

- f est dérivable en " a " ssi: $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = p$, p étant un nombre réel fini,
- le nombre dérivée de f en " a " est: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h)$.

1. f est-elle dérivable en $a > 0$?

a. L'ensemble de définition:

L'ensemble de définition est: $Df = [0; +\infty[$.

b. Exprimons, en fonction de h , le taux de variation entre a et $a + h$:

Ici: $a \in [0; +\infty[$ (car $a > 0$) et $a + h \in [0; +\infty[$ ($h \neq 0$).

$$\begin{aligned} \text{Dans ces conditions: } \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \end{aligned}$$

$$= \frac{(a+h) - (a)}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$((a-b)(a+b) = a^2 - b^2)$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

Ainsi, le taux de variation entre a et $a+h$ est: $\mathcal{T}(h) = \frac{1}{(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$.

c. Calculons la limite de $\mathcal{T}(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

D'où: $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

d. Conclusion:

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ (nombre réel fini): oui f est dérivable en $a > 0$

et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

2. f est-elle dérivable en $a = 0$?

• Nous savons que le taux de variation entre a et $a+h$ est: $\mathcal{T}(h) = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.

Donc le taux de variation entre $a = 0$ et $a+h = h$ est: $\mathcal{T}(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

- Lorsque h tend vers 0 par valeurs positives, le nombre \sqrt{h} tend vers 0 en étant positif.

Dans ces conditions: $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\tau}(h) = +\infty$.

- Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\tau}(h)$ ne tend pas vers un nombre réel fini: f n'est pas

dérivable en $a = 0$.

3. Concluons sur le domaine de dérivabilité de la fonction racine carrée:

La fonction racine carrée est uniquement dérivable sur: $]0; +\infty[$.