1ère

Mathématiques

Enseignement Scientifique

Taux de Variation

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

DÉRIVÉE DES FONCTIONS: $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ et $f(x) = x^3$

CORRECTION

1. Calculons $f'(x)$ quand $f(x) = x$:

Ici, il s'agit de calculer la dérivée de f, pour tout $x \in IR$.

D'après le cours: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

a. Le taux de variation entre x et $x + h$:

Ici: $x \in IR$ et $x + h \in IR$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h) - (x)}{h}$$

$$= \frac{h}{h}$$

$$= 1.$$

Ainsi, le taux de variation entre x et $x + h$ est: $\tau(h) = 1$.

b. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 1$.

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 1.$

c. La dérivée de f, pour tout $x \in IR$:

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 1$ (nombre réel fini): f est dérivable sur IR.

Et: pour tout $x \in IR$, $f'(x) = 1$.

2. Calculons $f'(x)$ quand $f(x) = x^2$:

Ici, il s'agit de calculer la dérivée de f, pour tout $x \in IR$.

D'après le cours: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

a. Le taux de variation entre x et $x + h$:

Ici: $x \in IR$ et $x + h \in IR$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions:
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h}$$
$$= \frac{(x^2 + h^2 + 2xh) - x^2}{h}$$
$$= \frac{h^2 + 2xh}{h}$$
$$= 2x + h.$$

Ainsi, le taux de variation entre x et $x + h$ est: $\tau(h) = 2x + h$.

b. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$\lim_{h \to 0} \tau(h) = 2x$.

D'où: $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 2x$.

c. La dérivée de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 2x$ (nombre réel fini pour tout x): f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

3. Calculons $f'(x)$ quand $f(x) = x^3$:

Ici, il s'agit de calculer la dérivée de f, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'après le cours: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

a. Le taux de variation entre x et $x + h$:

Ici: $x \in \mathbb{R}$ et $x + h \in \mathbb{R}$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^3 - (x)^3}{h}$

$$= \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^3)}{h}$$

$$= \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= 3x^2 + 3xh + h^2.$$

Ainsi, le taux de variation entre x et $x + h$ est: $\tau(h) = 3x^2 + 3xh + h^2$.

b. Calculons la limite de $\tau(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2.$$

D'où: $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 3x^2.$

c. La dérivée de f, pour tout $x \in IR$:

Comme $\lim_{h \to 0} \tau(h) = 3x^2$ (nombre réel fini pour tout x): f est dérivable sur IR.

Et: pour tout $x \in IR$, $f'(x) = 3x^2$.

* * * * * *

Au total, pour tout $x \in IR$:

$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$