www.freemaths.fr

1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Taux de Variation

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE LA DÉRIVÉE DE $f(x) = \sqrt{x}$

CORRECTION

Calculons $f'(x)$ quand $f(x) = \sqrt{x}$:

Ici, il s'agit de calculer la dérivée de f, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

D'après le cours: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

a. Le taux de variation entre x et $x + h$:

Ici: $x \in]0; +\infty[$ et $x + h \in]0; +\infty[$ $(h \neq 0)$.

Dans ces conditions: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$$= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) \times (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h \times (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{(x+h) - (x)}{h \times (\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$((a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2)$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}.$$

Ainsi, le taux de variation entre x et $x+h$ est: $\mathcal{T}(h) = \dfrac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$.

b. Calculons la limite de $\mathcal{T}(h)$ quand h tend vers 0:

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

D'où: $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c. La dérivée de f, pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$:

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{T}(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (nombre réel fini pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$):

f est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et pour tout $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.