www.freemaths.fr

1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Fonctions : Études

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE CUVE MÉTALLIQUE

CORRECTION

1. a. Montrons que l'aire du carré ABCD est $(3 - 2x)^2$:

D'après le cours, nous savons que l'aire d'un carré de côté " c " est:

$$\mathcal{A} = c \times c, \text{ " côté x côté ".}$$

Or ici: $c = 3 - x - x$

$= 3 - 2x$, avec $x \in [0 ; 1,5]$.

D'où l'aire du carré ABCD est donc bien: $\mathcal{A} = c \times c = (3 - 2x)^2$ mètres.

1. b. Montrons que le volume de la cuve est $V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$:

Le volume de la cuve est égal à: $\mathcal{A} \times x$.

Dans ces conditions, le volume V de la cuve est:

$V(x) = (3 - 2x)^2 \times x$

$= (9 + 4x^2 - 12x) \times x$

$= 4x^3 - 12x^2 + 9x$, avec $x \in [0 ; 1,5]$.

Ainsi, le volume de la cuve est bien: $V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$.

2. a. Calculons V' sur [0; 1,5], et vérifions que V' (0,5) = 0 et V' (1,5) = 0:

• La fonction V est dérivable sur [0; 15].

D'où nous pouvons calculer V' sur [0; 15]:

$$V'(x) = 12x^2 - 24x + 9, \text{ pour tout } x \in [0;\ 1,5].$$

• $V'(0,5) = 12 \times (0,5)^2 - 24 \times (0,5) + 9 = 0$

$V'(1,5) = 12 \times (1,5)^2 - 24 \times (1,5) + 9 = 0.$

Au total, pour tout $x \in [\ 0;\ 1,5\ ]$, nous avons: $V'(x) = 12x^2 - 24x + 9$

et $V'(0,5) = V'(1,5) = 0$.

0,5 et 1,5 sont donc les racines de la fonction V'.

2. b. Déduisons-en les variations de V sur [0; 1,5]:

Nous allons procéder en deux étapes.

Étape 1: on détermine le signe de V'.

V' admet deux racines: $x_1 = 0,5$ et $x_2 = 1,5$.

Et nous pouvons alors écrire, pour tout $x \in [\ 0;\ 1,5\ ]$:

$$V'(x) = 12\,(x - 0,5)\,(x - 1,5).$$

D'où le tableau de signe de V' sur [0; 1,5] est:

x	0		$0,5$		$1,5$
$x - 0,5$		$-$	0	$+$	
$x - 1,5$		$-$		$-$	0
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0

Ainsi le signe de V' sur $[\,0 ;\ 15\,]$ est :
- strictement positif sur $[\,0 ;\ 0,5\,[$
- nul si $x = 0$ ou $x = 1,5$
- strictement négatif sur $]\,0,5 ;\ 1,5\,[$.

Étape 2 : on dresse le tableau de variations de V.

Le tableau de variations de V sur $[\,0 ;\ 1,5\,]$ est le suivant :

x	0		$0,5$		$1,5$
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0
$V(x)$	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

, avec :
- $a = 0\ m^3$
- $b = 2\ m^3$
- $c = 0\ m^3$.

Ainsi :
- V est croissante sur $[\,0 ;\ 0,5\,]$
- V est décroissante sur $[\,0,5 ;\ 1,5\,]$.

2. c. Déterminons pour quelle valeur de x le volume de la cuve est maximal :

La fonction V est croissante sur [0 ; 0, 5] et décroissante sur [0, 5 ; 1, 5].

Elle présente donc un maximum quand: **$x = 0,5$ mètre.**

$V(0,5) = b = 2\ m^3$.

Ainsi, le volume maximal de la cuve est de $2 m^3$, et cela se produit quand le nombre $x = 0,5$ mètre.