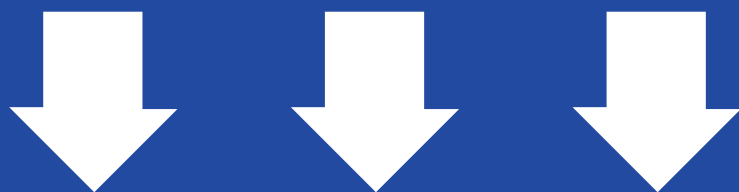


# Mathématiques

## Enseignement Scientifique

### Fonctions : Études



**CORRIGÉ** DE L'EXERCICE

# LA VEILLE SANITAIRE

## CORRECTION

1. a. Déterminons  $f'(0)$  par lecture graphique:

D'après l'énoncé: " la droite  $T$  est la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x = 0$  et passe par le point  $A$  de coordonnées  $(4; 45)$ ".

Dans ces conditions, par lecture graphique:  $f'(0) = \frac{45 - 0}{4 - 0} = 11,25$ .

1. b. Déduisons-en l'équation réduite de la tangente  $T$ :

La droite  $T$  passe par les points  $O(0; 0)$  et  $A(4; 45)$ .

Soit " $a$ " le coefficient directeur de cette droite, " $a$ " est tel que:

$$a = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} \text{ cad } a = \frac{45 - 0}{4 - 0} = \frac{45}{4}$$

Or la droite  $T$  a pour équation:  $y = a x + b$ , d'où:  $y = \frac{45}{4} x + b$ .

De plus,  $T$  passe par le point  $O(0; 0)$ , d'où:  $0 = \frac{45}{4} \times 0 + b$  cad  $b = 0$ .

Ainsi, une équation réduite de la tangente  $T$  est:  $y = \frac{45}{4} x$ .

2. a. Calculons  $f'(t)$ :

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; 11]$ , avec:  $f(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 + \frac{45}{4}t$ . <sup>2</sup>

D'où, nous pouvons calculer  $f'$  sur  $[0; 11]$ :

$$\begin{aligned} f'(t) &= -3t^2 + 21t + \frac{45}{4} \\ &= -3 \left( t^2 - 7t - \frac{15}{4} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction  $f$ , pour tout  $t \in [0; 11]$  est:

$$f'(t) = -3 \left( t^2 - 7t - \frac{15}{4} \right).$$

2. b. b1. Montrons que pour tout  $t \in [0; 11]$ ,  $f'(t) = -3 \left( t + \frac{1}{2} \right) \left( t - \frac{15}{2} \right)$ :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } t \in [0; 11]: \quad -3 \left( t + \frac{1}{2} \right) \left( t - \frac{15}{2} \right) &= -3 \left( t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{1}{2}t - \frac{15}{4} \right) \\ &= -3 \left( t^2 - 7t - \frac{15}{4} \right) \\ &= f'(t). \end{aligned}$$

Donc pour tout  $t \in [0; 11]$ , nous avons bien:  $f'(t) = -3 \left( t + \frac{1}{2} \right) \left( t - \frac{15}{2} \right)$ .

2. b. b2. Étudions le signe de  $f'(t)$  et déduisons-en le tableau de variation de  $f$ :

Distinguons 3 cas:  $\bullet f'(t) > 0$  ssi  $t \in [0; \frac{15}{2}[$

$\bullet f'(t) = 0$  ssi  $t = \frac{15}{2}$

$\bullet f'(t) < 0$  ssi  $t \in ]\frac{15}{2}; 11]$

Ainsi le signe de  $f'$  sur  $[0; 11]$  est:

- strictement positif sur  $[0; \frac{15}{2}[$
- nul si  $t = \frac{15}{2}$
- strictement négatif sur  $] \frac{15}{2}; 11]$ .

Et le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; 11]$  est le suivant:

|         |     |                |     |
|---------|-----|----------------|-----|
| $t$     | 0   | $\frac{15}{2}$ | 11  |
| $f'(t)$ | +   | 0              | -   |
| $f(t)$  | $a$ | $b$            | $c$ |

- , avec:
- $a = f(0) = 0$
  - $b = f\left(\frac{15}{2}\right) = 253, 125$
  - $c = f(11) = 63, 25$ .

### 3. Déduisons-en le nombre maximal de malades:

La fonction  $f$  est croissante sur  $[0; \frac{15}{2}]$  et décroissante sur  $[\frac{15}{2}; 11]$ .

Elle présente donc un maximum quand:  $t = 7, 5$  jours.

$$f(7, 5) = b = 253, 125 \times 1000 \text{ malades.}$$

Ainsi, c'est au bout de 7 jours et demi que le nombre de malades sera maximal, et ce dernier sera égal à 253 125.