

Mathématiques

Enseignement Scientifique

Fonctions : Études



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ENGRAIS BIOLOGIQUE

CORRECTION

1. Justifions que, pour tout x de $[8; 80]$, $R(x) = 70x$:

Nous savons que: • le prix d'un m^3 d'engrais est de 7000€

• le coût total de production est $C(x) = x^2 - 15x + 400$.

(avec $x \in [8; 80]$)

Or la recette générée par la vente de $x m^3$ d'engrais est:

$$R(x) = P \times x.$$

Ici, le prix exprimé en centaine d'euros est: $P = 70$.

D'où la recette totale est: $R(x) = P \times x$ **cad** $R(x) = 70 \times x$.

Ainsi, la recette totale de $x m^3$ d'engrais est égale à:

$$R(x) = 70x, \text{ où } x \in [8; 80].$$

2. Déduisons-en le bénéfice B:

Le bénéfice réalisé par la vente de $x m^3$ d'engrais est:

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ici, nous avons donc: } B(x) &= P \times x - (x^2 - 15x + 400) \\
 &= 70x - x^2 + 15x - 400 \\
 &= -x^2 + 85x - 400.
 \end{aligned}$$

Ainsi le bénéfice est bien égal à: $B(x) = -x^2 + 85x - 400$, où $x \in [8; 80]$.

3. Déterminons la fonction B' :

La fonction B est dérivable sur $[8; 80]$.

D'où, nous pouvons calculer B' sur $[8; 80]$:

$$B'(x) = -2x + 85, \text{ pour tout } x \in [8; 80].$$

La dérivée de la fonction B , pour tout $x \in [8; 80]$, est donc: $B'(x) = -2x + 85$.

4. Donnons le tableau de variations de la fonction B sur $[8; 80]$:

- Distinguons 3 cas:
- $B'(x) < 0$ ssi $x > 42,5$
 - $B'(x) = 0$ ssi $x = 42,5$
 - $B'(x) > 0$ ssi $x < 42,5$.

Dans ces conditions, nous avons le tableau de variations suivant:

x	8	42,5	80
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$			

- , avec:
- $a = B(8) = 216$
 - $b = B(42,5) = 1406,25$
 - $c = B(80) = 0$.

5. Déterminons combien l'entreprise doit vendre de m^3 d'engrais pour réaliser un bénéfice maximal et calculons ce bénéfice:

Ici, nous sommes en présence d'une parabole d'équation: $B(x) = -x^2 + 85x - 400$.

$$(ax^2 + bx + c)$$

Comme $a = -1 < 0$, la parabole est tournée vers le bas et son sommet est donc un maximum.

Deux possibilités pour calculer ce maximum !

- Le maximum ou sommet de la parabole a pour coordonnées:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = 42,5 \text{ et } y_s = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 1406,25.$$

- Le maximum de la parabole ($a = -1 < 0$) est atteint quand: $B'(x) = 0$.

$$B'(x) = 0 \text{ quand } x = 42,5.$$

Au total, l'entreprise doit vendre $42,5 m^3$ d'engrais pour réaliser un bénéfice maximal et ce dernier sera de $1406,25 \times 100 = 140625 \text{ €}$.