

Mathématiques

Enseignement Scientifique

Fonctions : Études



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8$$

CORRECTION

1. a. Calculons f' pour tout $x \in [-5; 5]$:

La fonction f est dérivable sur $[-5; 5]$, avec: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8$.

D'où, nous pouvons calculer f' sur $[-5; 5]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 24 \\ &= 3(x^2 - 2x - 8). \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction f , pour tout $x \in [-5; 5]$ est:

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x - 8).$$

1. b. Vérifions que pour tout $x \in [-5; 5]$, $f'(x) = 3(x - 4)(x + 2)$:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [-5; 5]: \quad 3(x - 4)(x + 2) &= 3(x^2 + 2x - 4x - 8) \\ &= 3(x^2 - 2x - 8) \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in [-5; 5]$, nous avons bien: $f'(x) = 3(x - 4)(x + 2)$.

2. a. Étudions le signe de f' sur $[-5; 5]$:

- Trois cas:
- $f'(x) > 0$
 - $f'(x) = 0$
 - $f'(x) < 0$.

Pour bien les distinguer, nous allons dresser le tableau de signe de f' sur $[-5; 5]$, sachant que f' admet 2 racines: $x_1 = -2$ et $x_2 = 4$.

x	-5	-2	4	5
$x - 4$	-	0	0	+
$x + 2$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+

- En conclusion:
- Si $x \in [-5; -2[\cup]4; 5]$, $f'(x) > 0$
 - Si $x = -2$ ou $x = 4$, $f'(x) = 0$
 - Si $x \in]-2; 4[$, $f'(x) < 0$.

- Ainsi le signe de f' sur $[-5; 5]$ est:
- strictement positif sur $[-5; -2[\cup]4; 5]$
 - nul si $t = -2$ ou $t = 4$
 - strictement négatif sur $] -2; 4[$.

2. b. Déduisons-en les variations de f sur $[-5; 5]$:

Le tableau de variation de f sur $[-5; 5]$ est le suivant:

x	-5	-2	4	5
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	a	b	c	d

, avec:

- $a = f(-5) = -72$
- $b = f(-2) = 36$
- $c = f(4) = -72$
- $d = f(5) = -67$.

3. Déterminons le maximum de f sur l'intervalle $[-5; 5]$:

La fonction f est croissante sur $[-5; -2]$ et décroissante sur $[-2; 4]$.

Elle présente donc un maximum quand: $x = -2$.

$$f(-2) = b = 36.$$

Ainsi le maximum "S" a pour coordonnées: $(-2; 36)$.

4. Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe au point $x = 0$:

L'équation réduite de la tangente à la courbe au point $x = 0$ est:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ cad } y - 8 = f'(0)x.$$

Ainsi, l'équation réduite de la tangente à la courbe au point $x = 0$ est:

$$y = -24x + 8.$$