1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Fonctions : Études

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$f(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 500$$

CORRECTION

1. Calculons f' sur $[0; 20]$:

La fonction f est dérivable sur $[0; 20]$, avec: $f(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 500$.

D'où, nous pouvons calculer f' sur $[0; 20]$:

$$f'(x) = -3x^2 + 60x - 108, \text{ pour tout } x \in [0; 20].$$

La dérivée de la fonction f, pour tout $x \in [0; 20]$, est donc:

$$f'(x) = -3x^2 + 60x - 108.$$

2. Montrons que $f'(x) = -3(x-2)(x-18)$:

Pour tout $x \in [0; 20]$: $-3(x-2)(x-18) = -3(x^2 - 18x - 2x + 36)$

$= -3x^2 + 60x - 108$

$= f'(x)$.

Donc, pour tout $x \in [0; 20]$, nous avons bien: $f'(x) = -3(x-2)(x-18)$.

3. Étudions le signe de f' sur $[0; 20]$:

Pour tout $x \in [0; 20]$: $f'(x) = -3(x-2)(x-18)$.

Freemaths : Tous droits réservés

Dans ces conditions, f' admet 2 racines: $x_1 = 2$ et $x_2 = 18$.

D'où le tableau de signe de f' sur $[0; 20]$ est:

x	0		2		18		20
$x - 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 18$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(car: $f'(x) = -3(x-2)(x-18)$)

Ainsi, le signe de f' sur $[0; 20]$ est:

- strictement positif sur $]2; 18[$
- nul si $x = 2$ ou $x = 18$
- strictement négatif sur $[0; 2[\cup]18; 20]$.

Freemaths : Tous droits réservés

4. a. Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $[0; 20]$:

Nous avons le tableau de variations suivant:

x	0		2		18		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c	$\searrow$	d

, avec:

- $a = -500$
- $b = -604$
- $c = 1444$
- $d = 1340$.

Ainsi:
- f est décroissante sur [0 ; 2]
- f est croissante sur [2 ; 18]
- f est décroissante sur [18 ; 20].

4. b. Y a-t-il un maximum sur [0 ; 20] ? Si oui, donnons ses coordonnées:

La fonction f est croissante sur [2 ; 18] et décroissante sur [18 ; 20].

Elle présente donc un maximum quand: $x = 18$.

$f(18) = c = 1\,444$.

Ainsi, oui ! il y a un maximum et ses coordonnées sont: $x = 18$ et $y = 1\,444$.

Freemaths : Tous droits réservés