1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Fonctions : Dérivées

MINI COURS

A. Dérivée d'une fonction:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- **f est dérivable sur un intervalle I lorsque f admet un nombre dérivé pour tout réel x de I, noté $f'(x)$.**
- **La fonction dérivée de f sur I est notée: f'.**

B. Tableau des dérivées:

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = m \cdot x + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$
$f(x) = a \cdot x^n + b$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{(n-1)}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt{x}$	$[\, 0 ; +\infty \,[$	$]\, 0 ; +\infty \,[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \begin{cases} -1 \text{ pour } x < 0 \\ 1 \text{ pour } x > 0 \end{cases}$

C. Opérations sur les fonctions dérivables:

Soient U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- $(U + V)' = U' + V'$
- $(k \times U)' = k \times U'$
- $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$
- $\left(\dfrac{1}{V}\right)' = -\dfrac{V'}{V^2}$ $\quad$ ($V \neq 0$ sur I)
- $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U' \times V - U \times V'}{V^2}$ $\quad$ ($V \neq 0$ sur I).

D. Dérivée de $f(x) = g(m \cdot x + p)$:

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.

Pour tout x réel tel que $m \cdot x + p \in I$, la fonction $f(x) = g(m \cdot x + p)$

est dérivable et: $f'(x) = m \times g'(m \cdot x + p)$.

E. Sens de variation d'une fonction:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- **f est croissante sur I ssi: $f'(x) \geqslant 0$**
- **f est strictement croissante sur I ssi: $f'(x) > 0$**
- **f est décroissante sur I ssi: $f'(x) \leqslant 0$**
- **f est strictement décroissante sur I ssi: $f'(x) < 0$**
- **f est constante sur I ssi: $f'(x) = 0$.**

F. Extremum:

1. Définition:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

f admet un extremum sur I si f admet un maximum ou un minimum sur I.

2. Propriété:

- **Soit f une fonction dérivable sur] a ; b [et x_0 un réel de cet intervalle.**

  Si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0, alors: $f'(x) = 0$.

- **Dans ce cas, la tangente à la courbe au point (x_0 ; f (x_0)) est horizontale.**

3. Tableau de variations et extremum:

Soit] a ; b [un intervalle contenant " c ".

- **Le point C (c ; f (c)) est un minimum local:**

x	a		c		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$f(c)$		$\nearrow$

• **Le point C (c ; f (c)) est un maximum local:**

x	a		c		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$		$f(c)$		$\searrow$

4. Polynômes du second degré et extremum:

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ avec } a \neq 0.$$

• **Si a > 0, le point A $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a} \right) \right)$ est un minimum global:**

x	$-\infty$		$\left(-\frac{b}{2a}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$		$\nearrow$

- **Si $a < 0$, le point $A\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est un maximum global:**

x	$-\infty$		$\left(-\frac{b}{2a}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	