1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Fonctions : Dérivées

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

CORRECTION

1. $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x + 2$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leqslant 0$ ssi $2x + 2 \leqslant 0$ cad $x \leqslant -1$.
- $f'(x) \geqslant 0$ ssi $2x + 2 \geqslant 0$ cad $x \geqslant -1$.

Ainsi:
- f est décroissante sur $]-\infty; -1]$
- f est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$
- f est croissante sur $[-1; +\infty[$
- f est strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

c. **Dressons le tableau de variations de f:**

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(-1)$	↗	

, avec: $f(-1) = -4$.

2. $f(x) = x^3 - 1$:

a. **Calculons sa dérivée f':**

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$.

b. **Étudions le sens de variation de f:**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 0$.

$(3x^2 \geqslant 0)$

Ainsi: f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c. **Dressons le tableau de variations de f:**

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

, avec : $f(0) = -1$.

3. $f(x) = x^3 - 9x$:

a. Calculons sa dérivée f' :

- $\mathcal{D}_f = IR$.
- f est dérivable sur IR. D'où : $\mathcal{D}_{f'} = IR$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$: $f'(x) = 3x^2 - 9$.

b. Étudions le sens de variation de f :

Distinguons 2 cas :

- $f'(x) \leqslant 0$ ssi $3x^2 - 9 \leqslant 0 \iff x^2 \leqslant 3$ cad $x \in [-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,]$.
- $f'(x) \geqslant 0$ ssi $3x^2 - 9 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 3$ cad $x \in\,]-\infty\,;-\sqrt{3}\,] \cup [\,\sqrt{3}\,;+\infty[$.

Ainsi :
- f est décroissante sur $[-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,]$
- f est strictement décroissante sur $]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\,[$
- f est croissante sur $]-\infty\,;-\sqrt{3}\,] \cup [\,\sqrt{3}\,;+\infty[$
- f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-\sqrt{3}\,[\cup]\,\sqrt{3}\,;+\infty[$.

c. Dressons le tableau de variations de f :

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-\sqrt{3})$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$	

, avec: • $f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$

• $f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}$.

4. $f(x) = -x^3 + 2x$:

a. Calculons sa dérivée f':

• $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

• Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -3x^2 + 2$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Distinguons 2 cas:

• $f'(x) \leqslant 0$ ssi $-3x^2 + 2 \leqslant 0 \iff x^2 \geqslant \frac{2}{3}$ cad $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[$.

• $f'(x) \geqslant 0$ ssi $-3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff x^2 \leqslant \frac{2}{3}$ cad $x \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right]$.

Ainsi: • f est décroissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[$

• f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty\right[$

- f est croissante sur $[-\sqrt{\frac{2}{3}}\,;\sqrt{\frac{2}{3}}]$
- f est strictement croissante sur $]-\sqrt{\frac{2}{3}}\,;\sqrt{\frac{2}{3}}[$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-\sqrt{\frac{2}{3}})$	$\nearrow$	$f(\sqrt{\frac{2}{3}})$	$\searrow$	

, avec:
- $f(-\sqrt{\frac{2}{3}}) = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$
- $f(\sqrt{\frac{2}{3}}) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. $f(x) = x^3 - 6x$:

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 6$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leqslant 0$ ssi $3x^2 - 6 \leqslant 0$ <=> $x^2 \leqslant 2$ cad $x \in [-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}]$.

• $f'(x) \geqslant 0$ ssi $3x^2 - 6 \geqslant 0 \iff x^2 \geqslant 2$ cad $x \in]-\infty ; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2} ; +\infty[$.

Ainsi: • f est décroissante sur $[-\sqrt{2} ; \sqrt{2}]$

• f est strictement décroissante sur $]-\sqrt{2} ; \sqrt{2}[$

• f est croissante sur $]-\infty ; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2} ; +\infty[$

• f est strictement croissante sur $]-\infty ; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2} ; +\infty[$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	$f(-\sqrt{2})$	↘	$f(\sqrt{2})$	↗	

, avec: • $f(-\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

• $f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$.

6. $f(x) = x^3 + 4x$:

a. Calculons sa dérivée f':

• $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

• Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 + 4$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

$(3x^2 \geqslant 0$ et $4 > 0)$

Ainsi: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

7. $f(x) = -x\,(3x^2 + 20)$:

Notons que: $f(x) = -x\,(3x^2 + 20) \iff f(x) = -3x^3 - 20x$.

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = -9x^2 - 20$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

$(-9x^2 \leqslant 0$ et $-2 < 0)$

Ainsi: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	↘

8. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$, définie sur $[-2 ; 4]$:

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f = [-2 ; 4]$ ici.
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-2 ; 4]$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = [-2 ; 4]$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in [-2 ; 4]$: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Notons que: $6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$.

Distinguons 2 cas:

- $f'(x) \leqslant 0$ ssi $6(x + 1)(x - 2) \leqslant 0 \iff (x + 1)(x - 2) \leqslant 0$ cad $x \in [-1 ; 2]$
- $f'(x) \geqslant 0 \iff (x + 1)(x - 2) \geqslant 0$ cad $x \in [-2 ; -1] \cup [2 ; 4]$.

Ainsi: • f est décroissante sur $[-1 ; 2]$

- f est strictement décroissante sur $]-1\,;\,2[$
- f est croissante sur $[-2\,;\,-1] \cup [2\,;\,4]$
- f est strictement croissante sur $[-2\,;\,-1[\cup]2\,;\,4]$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	-2		-1		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

, avec:
- $f(-1) = 13$
- $f(2) = -14$.

10. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$:

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$: $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) < 0$.

$(-1 < 0$ et $(x-1)^2 > 0)$

Ainsi: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

II. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-6}$:

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{3\}$.
- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} - \{3\}$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$:

$$f'(x) = \frac{(1) \times (2x-6) - (x+1) \times (2)}{(2x-6)^2}$$

$$= \frac{-8}{(2x-6)^2}.$$

b. Étudions le sens de variation de f:

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{3\}$, $f'(x) < 0$.

$(-8 < 0 \text{ et } (2x-6)^2 > 0)$

Ainsi: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} - \{3\}$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	||	$-$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

12. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$, définie sur $[0; 2]$:

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f = [0; 2]$ ici.
- f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-4\}$, donc sur $[0; 2]$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} = [0; 2]$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in [0; 2]$:

$$f'(x) = \frac{(3) \times (x+4) - (3x+2) \times (1)}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{10}{(x+4)^2}.$$

b. Étudions le sens de variation de f:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,2\,]$, $f'(x) > 0$.

($10 > 0$ et $(x+4)^2 > 0$)

Ainsi: f est strictement croissante sur $[\,0\,;\,2\,]$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	0	2
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

13. $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{1}{x}$, définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$:

a. Calculons sa dérivée f':

- $\mathcal{D}_f =]\,0\,;\,+\infty\,[$ ici.
- f est dérivable sur $I\!R^*$, donc sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$. D'où: $\mathcal{D}_{f'} =]\,0\,;\,+\infty\,[$.
- Dans ces conditions, pour tout $x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$: $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

b. Étudions le sens de variation de f:

Pour tout $x \in]\,0\,;\,+\infty\,[$, $f'(x) > 0$.

($2 > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$)

Ainsi: f est strictement croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. Dressons le tableau de variations de f:

Nous avons ainsi le tableau de variations suivant:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$