

Mathématiques

Enseignement Scientifique

Fonctions : Dérivées



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'AIRE D'UN TRAPÈZE

CORRECTION

1. Étudions les variations de f sachant que $x \in]0; 1[$:

Ici: • $\mathcal{D}_f =]0; 1[$,

• $\mathcal{D}_{f'} =]0; 1[$,

• pour tout $x \in]0; 1[$: $f'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

Notons que pour tout $x \in]0; 1[$: $2\sqrt{1-x^2} > 0$.

Donc le signe de f' dépend du signe de " $-2x^2 - 4x + 1$ ".

Nous savons que les racines de f' sont: $-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Or: • $x_1 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \in]0; 1[$

• $x_2 = -1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \notin]0; 1[$.

Distinguons 2 cas:

• $f'(x) \leq 0$ ssi $-2x^2 - 4x + 1 \leq 0$ cad ssi $x \in]-\infty; x_2] \cup [x_1; +\infty[$

• $f'(x) \geq 0$ ssi $-2x^2 - 4x + 1 \geq 0$ cad ssi $x \in [x_2; x_1]$.

Or: $x \in]0; 1[$ et $x_2 \notin]0; 1[$.

D'où: • $f'(x) \leq 0$ ssi $x \in [x_1; 1[$

• $f'(x) \geq 0$ ssi $x \in]0; x_1]$

Nous pouvons ainsi dresser le tableau de variations de f :

x	0	$x_1 = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$	1		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			a		

, avec: • $a = f(x_1)$.

Ainsi: • f est croissante sur $]0; x_1]$

• f est décroissante sur $[x_1; 1]$.

2. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ?

Ici, nous obtenons un seul extremum au point A d'abscisse $x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Comme f est croissante sur $]0; -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}[$ et décroissante sur $[-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}; 1[$,

l'extremum au point A d'abscisse $x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ est: un maximum.

Donc l'aire du trapèze est maximale quand: $x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$.

3. Déterminons alors cette aire:

L'aire maximale du trapèze est égale à: $a = f\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.