1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Fonctions : Dérivées

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE DÉRIVÉES 6

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- $f(x) = a \cdot x^n + b$ est dérivable sur IR et: $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{(n-1)}$. $(n \in IN^*)$

- $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}$, avec: $V(x) \neq 0$ sur $\mathcal{D}_f$.

1. Calculons la dérivée de $f(x) = \frac{4x + 8}{21x - 3}$: $\left(\frac{U}{V}\right)$

- **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $21x - 3 \neq 0$ cad $x \neq \frac{1}{7}$.

D'où: $\mathcal{D}_f = IR - \{\frac{1}{7}\}$.

- **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = IR - \{\frac{1}{7}\}$.

- Posons: $U(x) = 4x + 8$ et $V(x) = 21x - 3$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$: $U'(x) = 4$ et $V'(x) = 21$.

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in IR - \{ \frac{1}{7} \}$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(4) \times (21x - 3) - (4x + 8) \times (21)}{[21x - 3]^2}$$

$$= \frac{-180}{[21x - 3]^2}.$$

2. Calculons la dérivée de $f(x) = \frac{-x^2 + 10x + 3}{x - 7}$: $\left(\frac{U}{V}\right)$

• **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $x - 7 \neq 0$ cad $x \neq 7$.

D'où: $\mathcal{D}_f = IR - \{ 7 \}$.

• **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = IR - \{ 7 \}$.

• Posons: $U(x) = -x^2 + 10x + 3$ et $V(x) = x - 7$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$: $U'(x) = -2x + 10$ et $V'(x) = 1$.

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in IR - \{ 7 \}$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(-2x + 10) \times (x - 7) - (-x^2 + 10x + 3) \times (1)}{[x - 7]^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 14x - 73}{[x-7]^2}.$$

3. Calculons la dérivée de $f(x) = \dfrac{3x^4 - 6x^2 + 8}{2x^2 + x}$: $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

• **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $2x^2 + x \neq 0 \iff x(2x + 1) \neq 0$ cad $x \neq 0$ et $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

D'où: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\dfrac{1}{2}; 0\}$.

• **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\dfrac{1}{2}; 0\}$.

• Posons: $U(x) = 3x^4 - 6x^2 + 8$ et $V(x) = 2x^2 + x$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$:

$$U'(x) = 12x^3 - 12x \text{ et } V'(x) = 4x + 1.$$

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-\dfrac{1}{2}; 0\}$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(12x^3 - 12x) \times (2x^2 + x) - (3x^4 - 6x^2 + 8) \times (4x + 1)}{[2x^2 + x]^2}$$

$$= \frac{12x^5 + 9x^4 - 6x^2 - 32x - 8}{[2x^2 + x]^2}.$$

4. Calculons la dérivée de $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{-2x + 1}$: $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

• **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $-2x + 1 \neq 0$ cad $x \neq \frac{1}{2}$.

D'où: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

• **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.

• Posons: $U(x) = 2x^2 + x + 1$ et $V(x) = -2x + 1$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$: $U'(x) = 4x + 1$ et $V'(x) = -2$.

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(4x + 1) \times (-2x + 1) - (2x^2 + x + 1) \times (-2)}{[-2x + 1]^2}$$

$$= \frac{-4x^2 + 4x + 3}{[-2x + 1]^2}.$$

5. **Calculons la dérivée de $f(x) = \frac{5x^2 - 2x - 7}{3x - 4}$:** $\left(\frac{U}{V}\right)$

• **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $3x - 4 \neq 0$ cad $x \neq \frac{4}{3}$.

D'où: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{\frac{4}{3}\}$.

• **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{ \frac{4}{3} \}$.

• Posons: $U(x) = 5x^2 - 2x - 7$ et $V(x) = 3x - 4$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$: $U'(x) = 10x - 2$ et $V'(x) = 3$.

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R} - \{ \frac{4}{3} \}$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(10x - 2) \times (3x - 4) - (5x^2 - 2x - 7) \times (3)}{[3x - 4]^2}$$

$$= \frac{15x^2 - 40x + 29}{[3x - 4]^2}.$$

6. **Calculons la dérivée de $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}$:** $\left(\frac{U}{V} \right)$

• **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $x^2 + 1 \neq 0$, ce qui est toujours vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• Posons: $U(x) = 3x^2 - 2x$ et $V(x) = x^2 + 1$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$: $U'(x) = 6x - 2$ et $V'(x) = 2x$.

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in I\!R$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(6x - 2) \times (x^2 + 1) - (3x^2 - 2x) \times (2x)}{[x^2 + 1]^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x - 2}{[x^2 + 1]^2}.$$

7. **Calculons la dérivée de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{(x^2 + 5)^2}$:** $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

• Le domaine de définition de f ?

Il faut que: $(x^2 + 5)^2 \neq 0$, ce qui est toujours vérifié pour tout $x \in I\!R$.

D'où: $\mathcal{D}_f = I\!R$.

• Le domaine de dérivabilité de f ?

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = I\!R$.

• Posons: $U(x) = x^2 - 4x - 5$ et $V(x) = (x^2 + 5)^2 = x^4 + 10x^2 + 25$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$:

$$U'(x) = 2x - 4 \ \text{ et } \ V'(x) = 4x^3 + 20x.$$

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in I\!R$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(2x - 4) \times (x^4 + 10x^2 + 25) - (x^2 - 4x - 6) \times (4x^3 + 20x)}{[(x^2 + 5)^2]^2}$$

$$= \frac{-2x^5 + 12x^4 + 24x^3 + 40x^2 + 170x + 100}{(x^2+5)^4}.$$

8. Calculons la dérivée de $f(x) = \dfrac{x-1}{3x^2+2}$: $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

• **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $3x^2 + 2 \neq 0$, ce qui est toujours vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$.

D'où: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• Posons: $U(x) = x - 1$ et $V(x) = 3x^2 + 2$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$: $U'(x) = 1$ et $V'(x) = 6x$.

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(1) \times (3x^2+2) - (x-1) \times (6x)}{[3x^2+2]^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 6x + 2}{[3x^2+2]^2}.$$

9. Calculons la dérivée de $f(x) = \dfrac{x^2+9}{3} - \dfrac{3}{x+1}$: $\left(\dfrac{U}{V}\right)$

Notons que: $f(x) = \dfrac{x^2+9}{3} - \dfrac{3}{x+1}$ <=> $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 9x}{3(x+1)}$.

• **Le domaine de définition de f ?**

Il faut que: $3(x+1) \neq 0$ cad $x \neq -1$.

D'où: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

• **Le domaine de dérivabilité de f ?**

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

• Posons: $U(x) = x^3 + x^2 + 9x$ et $V(x) = 3(x+1)$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$: $U'(x) = 3x^2 + 2x + 9$ et $V'(x) = 3$.

f est donc dérivable sur $\mathcal{D}_{f'}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $V(x) \neq 0$, et:

$$f'(x) = \frac{U'(x) \times V(x) - U(x) \times V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$= \frac{(3x^2 + 2x + 9) \times (3(x+1)) - (x^3 + x^2 + 9x) \times (3)}{[3(x+1)]^2}$$

$$= \frac{6x^3 + 12x^2 + 6x + 27}{9(x+1)^2}.$$