1ère

Mathématiques
Enseignement Scientifique

Fonctions : Dérivées

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE DÉRIVÉES 5

CORRECTION

D'après le cours, nous savons que:

- $f(x) = a \cdot x^n + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et: $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{(n-1)}$. $(n \in \mathbb{N}^*)$
- $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$.

1. Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = 3x(4x+2)$:

- Le domaine de définition de f est: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- Le domaine de dérivabilité de f est: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

- **Méthode 1:** On développe f.

$f(x) = 3x(4x+2) = 12x^2 + 6x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et: $f'(x) = 24x + 6$.

- **Méthode 2:** On a recours à la formule $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$.

Ici: $f(x) = (3x) \times (4x+2)$.

Posons: $U(x) = 3x$ et $V(x) = 4x + 2$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $U'(x) = 3$ et $V'(x) = 4$.

f est donc dérivable sur IR et: $f'(x) = U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x)$

$= (3) \times (4x + 2) + (3x) \times (4)$

$= 24x + 6.$

2. Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = (-x + 6)(3x - 2)$:

- Le domaine de définition de f est: $\mathcal{D}_f = IR.$
- Le domaine de dérivabilité de f est: $\mathcal{D}_{f'} = IR.$

- **Méthode 1**: On développe f.

$f(x) = (-x + 6)(3x - 2) = -3x^2 + 20x - 12$, pour tout $x \in IR$.

f est donc dérivable sur IR et: $f'(x) = -6x + 20.$

- **Méthode 2**: On a recours à la formule $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$.

Ici: $f(x) = (-x + 6) \times (3x - 2).$

Posons: $U(x) = -x + 6$ et $V(x) = 3x - 2.$

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$: $U'(x) = -1$ et $V'(x) = 3.$

f est donc dérivable sur IR et: $f'(x) = U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x)$

$= (-1) \times (3x - 2) + (-x + 6) \times (3)$

$= -6x + 20.$

3. Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = -x^2(-x^3 + 21x + 1)$:

- Le domaine de définition de f est: $\mathcal{D}_f = IR.$

• Le domaine de dérivabilité de f est: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

• **Méthode 1**: **On développe f.**

$f(x) = -x^2(-x^3 + 21x + 1) = x^5 - 21x^3 - x^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et: $\boldsymbol{f'(x) = 5x^4 - 63x^2 - 2x}$.

• **Méthode 2**: **On a recours à la formule $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$.**

Ici: $f(x) = (-x^2) \times (-x^3 + 21x + 1)$.

Posons: $\boldsymbol{U(x) = -x^2}$ **et** $\boldsymbol{V(x) = -x^3 + 21x + 1}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boldsymbol{U'(x) = -2x}$ **et** $\boldsymbol{V'(x) = -3x^2 + 21}$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et: $\boldsymbol{f'(x) = U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x)}$

$$= (-2x) \times (-x^3 + 21x + 1) + (-x^2) \times (-3x^2 + 21)$$

$$= \boldsymbol{5x^4 - 63x^2 - 2x}.$$

4. Calculons la dérivée de la fonction $f(x) = (-3x^2 + 5x - 4)(2x^4 + x^3 - x + 30)$:

• Le domaine de définition de f est: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

• Le domaine de dérivabilité de f est: $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}$.

• **Méthode 1**: **On développe f.**

$f(x) = (-3x^2 + 5x - 4)(2x^4 + x^3 - x + 30)$

$= -6x^6 + 7x^5 - 3x^4 - x^3 - 95x^2 + 154x - 120$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et:

$$f'(x) = -36x^5 + 35x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 190x + 154.$$

• **Méthode 2**: On a recours à la formule $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$.

Ici: $f(x) = (-3x^2 + 5x - 4) \times (2x^4 + x^3 - x + 30)$.

Posons: $U(x) = -3x^2 + 5x - 4$ et $V(x) = 2x^4 + x^3 - x + 30$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$:

$$U'(x) = -6x + 5 \text{ et } V'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 1.$$

f est donc dérivable sur IR et:

$$f'(x) = U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x)$$

$$= (-6x + 5) \times (2x^4 + x^3 - x + 30) + (-3x^2 + 5x - 4) \times (8x^3 + 3x^2 - 1)$$

$$= -36x^5 + 35x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 190x + 154.$$

5. Calculons la dérivée de $f(x) = (3x^4 - 6x^2)(x^9 - 14x^7 + 50)$:

• Le domaine de définition de f est: $\mathcal{D}_f = IR$.

• Le domaine de dérivabilité de f est: $\mathcal{D}_{f'} = IR$.

• **Méthode 1**: On développe f.

$f(x) = (3x^4 - 6x^2)(x^9 - 14x^7 + 50)$

$= 3x^{13} - 48x^{11} + 84x^9 + 150x^4 - 300x^2$, pour tout $x \in IR$.

f est donc dérivable sur IR et:

$$f'(x) = 39x^{12} - 528x^{10} + 756x^8 + 600x^3 - 600x.$$

• **Méthode 2**: **On a recours à la formule $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$.**

Ici: $f(x) = (3x^4 - 6x^2) \times (x^9 - 14x^7 + 50)$.

Posons: $U(x) = 3x^4 - 6x^2$ et $V(x) = x^9 - 14x^7 + 50$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$:

$$U'(x) = 12x^3 - 12x \text{ et } V'(x) = 9x^8 - 98x^6.$$

f est donc dérivable sur IR et:

$$f'(x) = U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x)$$

$$= (12x^3 - 12x) \times (x^9 - 14x^7 + 50) + (3x^4 - 6x^2) \times (9x^8 - 98x^6)$$

$$= 39x^{12} - 528x^{10} + 756x^8 + 600x^3 - 600x.$$

6. Calculons la dérivée de $f(x) = (x^n + 30x^3)(3x^2 - 7x + 3)$, $n \in IN^*$:

• Le domaine de définition de f est: $\mathcal{D}_f = IR$.

• Le domaine de dérivabilité de f est: $\mathcal{D}_{f'} = IR$.

• **Méthode 1**: **On développe f.**

$f(x) = (x^n + 30x^3)(3x^2 - 7x + 3)$

$= 3x^{(n+2)} - 7x^{(n+1)} + 3x^n + 90x^5 - 210x^4 + 90x^3$, pour tout $x \in IR$.

f est donc dérivable sur IR et:

$$f'(x) = (3n + 6)x^{(n+1)} - (7n + 7)x^n + 3nx^{(n-1)} + 450x^4 - 840x^3 + 270x^2.$$

• **Méthode 2**: **On a recours à la formule $(U \times V)' = U' \times V + U \times V'$.**

Ici: $f(x) = (x^n + 30x^3) \times (3x^2 - 7x + 3)$.

Posons: $U(x) = x^n + 30x^3$ et $V(x) = 3x^2 - 7x + 3$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U'(x) = nx^{(n-1)} + 90x^2 \quad \text{et} \quad V'(x) = 6x - 7.$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et:

$$\begin{aligned} f'(x) &= U'(x) \times V(x) + U(x) \times V'(x) \\ &= (nx^{(n-1)} + 90x^2) \times (3x^2 - 7x + 3) + (x^n + 30x^3) \times (6x - 7) \\ &= (3n + 6)x^{(n+1)} - (7n + 7)x^n + 3nx^{(n-1)} + 450x^4 - 840x^3 + 270x^2. \end{aligned}$$