Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un numéro de carte bancaire est de la forme :

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ c$$

où a_1, a_2, ..., a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9.
Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire.
c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres.
L'algorithme suivant permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

Initialisation : I prend la valeur 0
P prend la valeur 0
R prend la valeur 0
Traitement : Pour k allant de 0 à 7 :
| R prend la valeur du reste de la division euclidienne de $2a_{2k+1}$ par 9
| I prend la valeur $I + R$
Fin Pour
Pour k allant de 1 à 7 :
| P prend la valeur $P + a_{2k}$
Fin Pour
S prend la valeur $I + P + c$
Sortie : Si S est un multiple de 10 alors :
| Afficher « Le numéro de la carte est correct. »
Sinon :
| Afficher « Le numéro de la carte n'est pas correct. »
Fin Si

1. On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411.
   a) Compléter le tableau en annexe permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.
   b) Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.
   c) On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre (initialement 5) est changé en 6. Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35$ 4002 9561 3411 reste correct ?
2. On connaît les quinze premiers chiffres du numéro d'une carte bancaire. Montrer qu'il existe une clé c rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique.
3. Un numéro de carte dont les chiffres sont tous égaux peut-il être correct ? Si oui, donner tous les numéros de carte possibles de ce type.
4. On effectue le test suivant : on intervertit deux chiffres consécutifs distincts dans un numéro de carte correct et on vérifie si le numéro obtenu reste correct.
   On a trouvé une situation où ce n'est pas le cas, l'un des deux chiffres permutés valant 1.
   Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

EXERCICE 4

[Liban 2017]

1. a. Complétons le tableau:

Le tableau complété est le suivant:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}	5	3	4	0	9	6	3	1
$2a_{2k+1}$	10	6	8	0	18	12	6	2
R	1	6	8	0	0	3	6	2
I	1	7	15	15	15	18	24	26

1. b. Justifions que le numéro de la carte est correct:

Le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct ssi:

$$S = I + P + c \text{ est un multiple de } 10.$$

Or: • $I = 26$ (question précédente),

• $P = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} = 23$,

• $c = 1$.

Dans ces conditions: $S = 26 + 23 + 1 \Rightarrow S = 50 = 5 \times 10$.

Au total, comme S est un multiple de 10:

le numéro de la carte est correct.

1. c. Déterminons " a " tel que la carte 6a35 4002 9561 3411 soit correct:

Le numéro de la carte 6a35 4002 9561 3411 est correct ssi:

$$S = I + P + c \text{ est un multiple de } 10.$$

Or ici: • $I = 26 + 2 = 28$, car dans le cas de cette carte, la 1ère colonne du tableau s'écrit:

k	0
a_{2k+1}	6
$2a_{2k+1}$	12
R	3
I	$3 = 1 + 2$

,

• $P = a + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14}$

$= a + 17,$

• $c = 1.$

D'où: $S = 28 + a + 17 + 1 \Rightarrow S = 46 + a.$

Ainsi, comme S doit être un multiple de 10 et que $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$: nous pouvons affirmer que " a " doit être égal à 4 pour que la nouvelle carte soit correcte.

2. Montrons qu'il existe une clé " c " rendant ce numéro de carte correct et que cette clé est unique:

Le numéro de la carte est correct ssi: $S = I + P + c$ est un multiple de 10.

Posons: $I + P = (10 \times x) + y.$

D'après l'énoncé, nous savons que: $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Dans ces conditions, S est un multiple de 10 ssi:

$y + c$ est un multiple de 10.

Distinguons deux cas sachant que la valeur maximale que peut prendre **c** est " **9** ".

1er cas: si $y = 0$, alors une seule solution pour c: $c = 0$.

2e cas: si $y \neq 0$ cad $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, alors une seule solution pour c: $c = 10 - y$.

Au total: il existe bien une clé " c " rendant ce numéro de carte correct et cette clé est unique.

3. Donnons tous les numéros de carte possibles qui sont corrects sachant que leurs chiffres sont tous égaux:

Soit une carte dont le numéro est composé de chiffres tous égaux:

FFFF FFFF FFFF FFFF.

F peut prendre les valeurs: 0, 1, 2, . . ., 9.

Nous allons calculer " S " pour les différentes valeurs de **F**.

- quand $F = 0$: $S = 0$, **(multiple de 10)**
- quand $F = 1$: $S = 24$,
- quand $F = 2$: $S = 48$,
- quand $F = 3$: $S = 72$,

- quand $F = 4$: $S = 96$,
- quand $F = 5$: $S = 48$,
- quand $F = 6$: $S = 72$,
- quand $F = 7$: $S = 96$,
- quand $F = 8$: $S = 120$, **(multiple de 10)**
- quand $F = 9$: $S = 72$.

Au total, 2 numéros de carte sont possibles:

- **0000 0000 0000 0000**
- **8888 8888 8888 8888**.

4. Peut-on déterminer l'autre chiffre permuté ?

Non, nous ne pouvons pas déterminer l'autre chiffre permuté.