Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

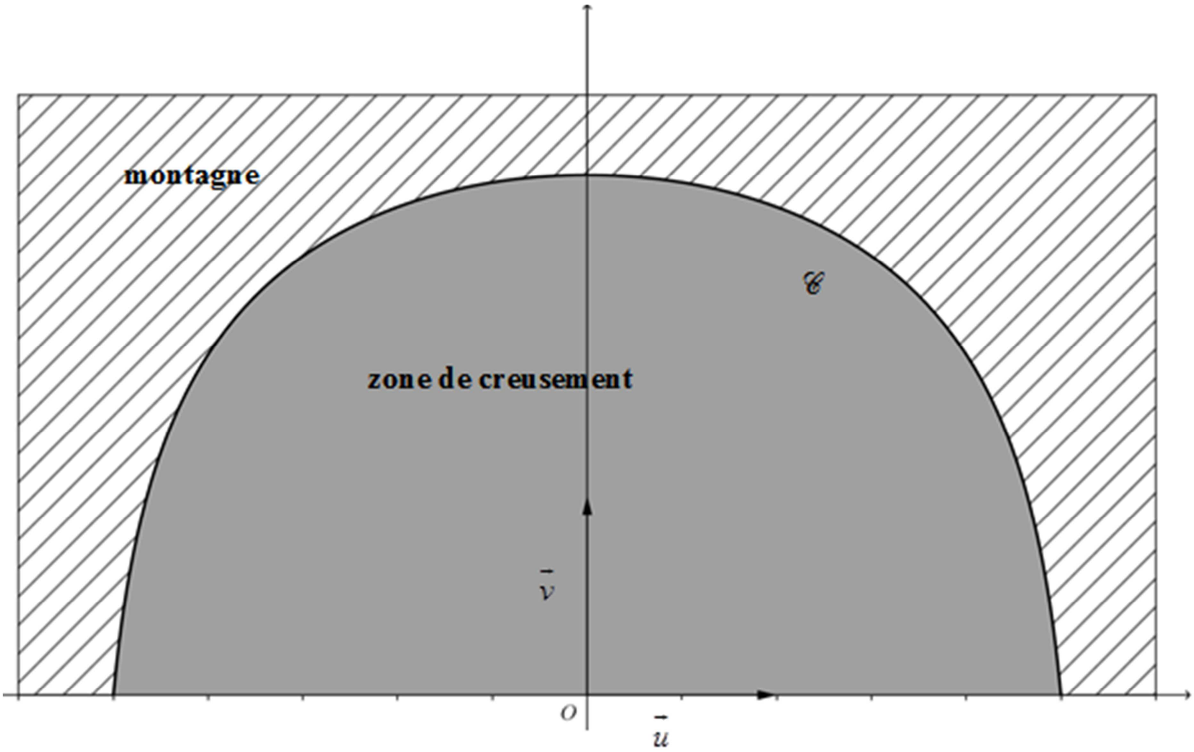
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet comporte deux feuilles d'annexes à la page 8/9 et 9/9, à remettre avec la copie.

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\,;2,5]$ par :

$$f(x)=\ln\left(-2x^2+13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction *f*

1. Calculer $f'(x)$ pour $x\in[-2,5\ ;\ 2,5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\,;2,5]$.
   En déduire le signe de f sur $[-2,5\,;2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.

2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = 8\int_0^{2,5} f(x)\mathrm{d}x$.

3. L'algorithme, donné en annexe page 8/9, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \int_0^{2,5} f(x)\mathrm{d}x$, notée a.

On admet que : $a \leq I \leq a + \dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$

a. Le tableau fourni en annexe, page 8/9, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.
Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

```
Variables
    R et S sont des réels
    n et k sont des entiers
Traitement
    S prend la valeur 0
    Demander la valeur de n
    Pour k variant de 1 à n faire
        R prend la valeur 2,5/n × f(2,5/n × k)
        S prend la valeur S + R
    Fin Pour
    Afficher S
```

Variables

- R et S sont des réels
- n et k sont des entiers

Traitement

- S prend la valeur 0
- Demander la valeur de n
- Pour k variant de 1 à n faire
  - R prend la valeur $\dfrac{2,5}{n}\times f\left(\dfrac{2,5}{n}\times k\right)$
  - S prend la valeur $S+R$
- Fin Pour
- Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n=50$.

Initialisation	$S=0$ $n=50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	………	………
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	………
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	………	…………
Affichage	$S=$ ………		

EXERCICE 3

[Inde, Pondichéry 2017]

Partie A: Étude de la fonction f

1. Calculons f' sur $[-2,5 ; 2,5]$:

Ici: • $f(x) = \ln(-2x^2 + 13,5)$ $(\ln(u))$

• $Df = [-2,5 ; 2,5]$.

Posons: $f = \ln(g)$, avec: $g(x) = -2x^2 + 13,5$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[-2,5 ; 2,5]$ comme composée $(\ln(g))$ de 2 fonctions dérivables sur $[-2,5 ; 2,5]$, avec: $g > 0$ sur $[-2,5 ; 2,5]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$.

Pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$: $f'(x) = \dfrac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$ $\left(\dfrac{u'}{u}\right)$.

Au total, pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$: $f'(x) = \dfrac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$.

2. a. Dressons le tableau de variation de f sur $[-2,5 ; 2,5]$:

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [-2,5 ; 2,5]$:

• **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $-4x = 0$, cad: $x = 0$.

• **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $-4x < 0$, cad: $x > 0$ **ou** $x \in]0 ; 2,5]$.

• **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $-4x > 0$, cad: $x < 0$ **ou** $x \in [-2,5 ; 0[$.

Au total: • f est croissante sur $[-2,5 ; 0]$,

(car sur $[-2,5 ; 0]$, $f'(x) \geqslant 0$)

• f est décroissante sur $[0 ; 2,5]$.

(car sur $[0 ; 2,5]$, $f'(x) \leqslant 0$)

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	$-2,5$		0		$2,5$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = f(-2,5) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(0) \Rightarrow b = \ln(13,5)$,

• $c = f(2,5) \Rightarrow c = 0$.

2. b. Déduisons-en le signe de f sur $[-2,5\,;2,5]$:

D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que:

" Pour tout $x \in [-2,5\,;2,5]$, $f(x) > 0$ ".

Partie B: Aire de la zone de creusement

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre 0 ?

Soient A et B les points tels que: $A\,(0\,;f(0))$ et $B\,(2,5\,;f(2,5))$.

Comme $OA \neq OB$, nous pouvons affirmer que: la courbe $\mathscr{C}$ n'est pas un arc de cercle de centre 0.

2. Justifions la valeur de l'aire $\mathscr{A}$:

Ici: $\mathscr{A} = \int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx$.

Or: • f est paire sur $[-2,5\,;2,5]$, cad: $f(-x) = f(x)$.

$$\left(\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \times \int_{0}^{a} f(x)\,dx \right)$$

• nous sommes en présence d'un repère orthonormal d'unité 2 mètres; donc une unité d'aire est égale à 4 (mètres)^2.

Dans ces conditions: $\mathscr{A} = \int_{-2,5}^{2,5} f(x)\,dx \iff \mathscr{A} = 4 \times 2 \times \int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$.

Au total, nous avons bien: $\mathscr{A} = 8 \int_{0}^{2,5} f(x)\,dx$.

3. a. Complétons le tableau en calculant les six valeurs manquantes:

Nous avons le tableau complété suivant:

ANNEXE à compléter et à remettre avec la copie

EXERCICE 3

Variables
- R et S sont des réels
- n et k sont des entiers

Traitement
- S prend la valeur 0
- Demander la valeur de n
- Pour k variant de 1 à n faire
    - R prend la valeur $\dfrac{2{,}5}{n} \times f\left(\dfrac{2{,}5}{n} \times k\right)$
    - S prend la valeur $S + R$
- Fin Pour
- Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0$ $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	0, 130 116	0, 130 116
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	0, 519 981
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	0	5, 197 538
Affichage	$S =$ 5, 197 538		

3. b. Déduisons-en une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement:

En prenant $a = 5,197538$ et $n = 50$, nous obtenons:

$$5,197538 \leqslant I \leqslant 5,32767.$$

Comme: $\mathscr{A} = 8 \times I$, $41,581 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 42,622$.

Ainsi, une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement est: $\mathscr{A} = 42 \text{ m}^2$.