Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

ÉPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire Coefficient : 7

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

La page 8 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 1 (7 points) : **commun à tous les candidats**

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $h(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.

a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$

où h' désigne la fonction dérivée de h.

b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.

c. Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe page 8. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x; f(x))$ et N le point de coordonnées $\left(x; g(x)\right)$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes C_f et C_g.

a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.

b. Placer sur le graphique fourni en annexe **page 8** les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.

2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes C_f et C_g et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

a. Hachurer le domaine D_λ correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe **page 8**.

b. On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

$$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{e^\lambda}.$$

c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

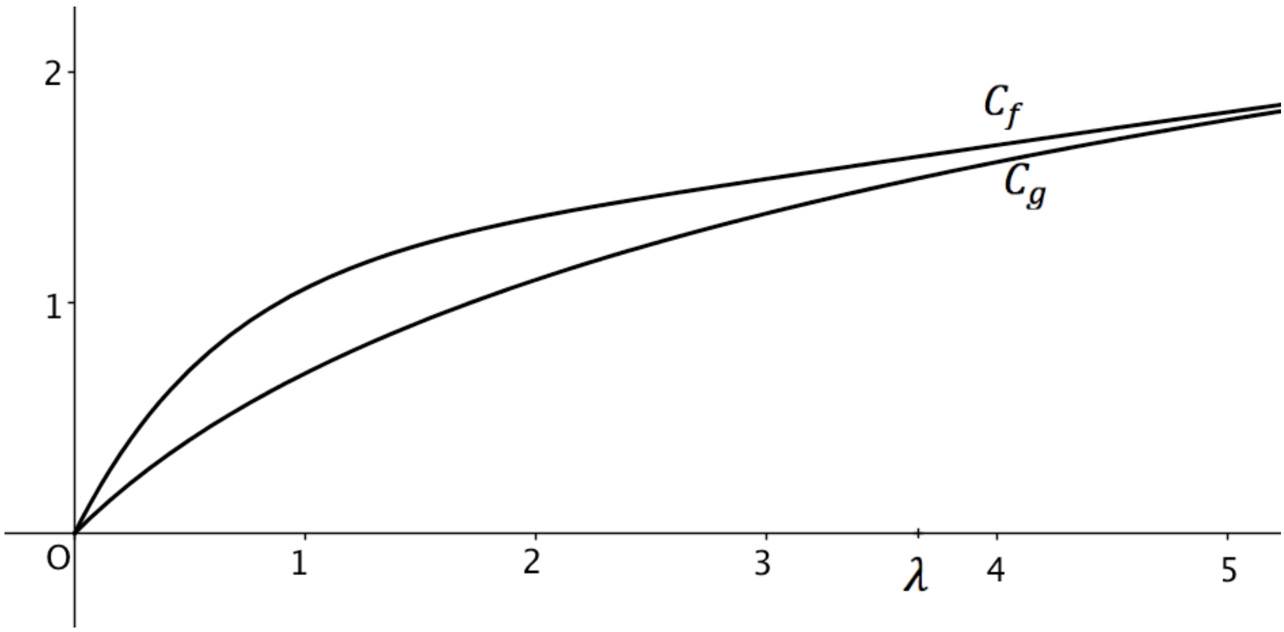
Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1-\frac{\lambda+1}{e^{\lambda}}<S$ faire
	λ prend la valeur $\lambda+1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S=0{,}8$?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Annexe à remettre avec la copie

Exercice 1



EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2017]

Partie A:

1. Déterminons la limite de la fonction h en $+\infty$:

Il s'agit ici de calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{-x}$ **(u x v)**

$$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}.$$

Or, d'après le cours: • $\lim\limits_{U \to +\infty} \frac{U}{e^U} = 0$ (Théorème des croissances comparées).

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0.$

Au total: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0.$

2. Étudions le sens de variation de la fonction h sur $[\,0\,; +\infty\,[$ et dressons son tableau de variations:

• **Calculons h':**

Ici: • $h(x) = \frac{x}{e^x}$

• $D_h = [\,0\,; +\infty\,[.$

Posons: $h = \frac{h_1}{h_2}$, avec: $h_1(x) = x$ et $h_2(x) = e^x$.

h_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

h_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Par conséquent, h est dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme quotient $\left(\dfrac{h_1}{h_2}\right)$ de deux fonctions dérivables sur $[\,0\,;+\infty\,[$, avec: pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $h_2(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer h' pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $h'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$ $(u' \times v + u \times v')$

$$\Rightarrow \; h'(x) = (1 - x)\, e^{-x}.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $h'(x) = (1 - x)\, e^{-x}$.

• **Étudions le sens de variation de h' sur $[\,0\,;+\infty\,[$:**

Nous allons distinguer 3 cas pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

1er cas: $h'(x) = 0$.

$h'(x) = 0$ ssi $x = 1$ (car sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $e^{-x} > 0$).

2ème cas: $h'(x) < 0$.

$h'(x) < 0$ ssi $x > 1$ (car sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $e^{-x} > 0$).

3ème cas: $h'(x) > 0$.

$h'(x) > 0$ ssi $x < 1$ (car sur $[\,0\,;+\infty\,[$: $e^{-x} > 0$).

Au total: • h est croissante sur $[\,0\,;1\,]$,

(car sur $[\,0\,;1\,]$, $h'(x) \geq 0$)

• h est décroissante sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

(car sur $[\ 1 ; +\infty\ [$, $\quad h'(x) \leqslant 0$)

• **Tableau de variation**:

Nous pouvons donc dresser le tableau de variation suivant:

x	0		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	
h			b		
	a	$\nearrow$		$\searrow$	c

Avec: $\quad$ • $a = h(0) \implies a = 0$,

• $b = h(1) \implies b = e^{-1}$,

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) \implies c = 0$.

3. a. Vérifions que pour tout $x \in [\ 0 ; +\infty\ [$, $h(x) = e^{-x} - h'(x)$:

Nous savons que pour tout $x \in [\ 0 ; +\infty\ [$:

• $h(x) = x e^{-x}$

• $h'(x) = (1 - x)\, e^{-x}$.

Ainsi: $\quad e^{-x} - h'(x) = e^{-x} - (1 - x)\, e^{-x}$

$$= x e^{-x}.$$

Au total, pour tout $x \in [\ 0 ; +\infty\ [$, nous avons bien: $\quad h(x) = e^{-x} - h'(x)$.

3. b. Déterminons une primitive de e^{-x} sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

Une primitive de e^{-x} sur $[\,0\,;+\infty\,[$ est: $-e^{-x}$.

Ainsi, sur $[\,0\,;+\infty\,[$, e^{-x} admet comme primitive: $-e^{-x}$.

3. c. Déduisons-en une primitive de la fonction h sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

h est continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$, elle admet donc une primitive sur $[\,0\,;+\infty\,[$ cad une fonction H dérivable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ avec: $H' = h$.

Ici: $H(x) = \int h(x)\,dx$

$$= \int (e^{-x} - h'(x))\,dx$$

$$= \int e^{-x}\,dx - \int h'(x)\,dx$$

$$= -e^{-x} - h(x).$$

Et nous avons bien, pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $H'(x) = e^{-x} - h'(x)$.

Au total, sur $[\,0\,;+\infty\,[$, une primitive de h est:

$H(x) = -e^{-x} - h(x)$ ou $H(x) = -(1+x)\,e^{-x}$.

Partie B:

1. a. Déterminons la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donnons cette distance:

Nous savons que pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$:

- $f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \iff f(x) = h(x) + \ln(x+1)$,
- $g(x) = \ln(x+1) \iff g(x) = f(x) - h(x)$.

La distance MN est maximale quand $f(x) - g(x)$ est maximale, ce qui revient à dire quand: $h(x)$ est maximale.

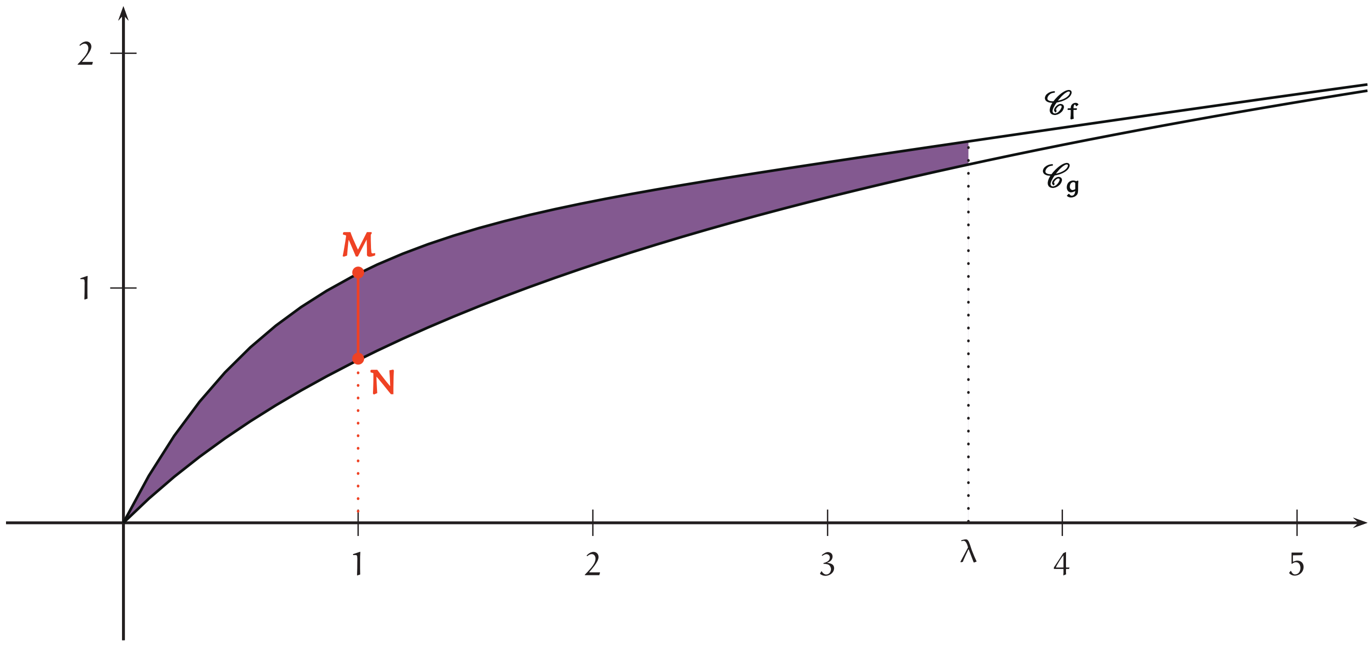
Or $h(x)$ est maximale quand: $x = 1$ (d'après 2.).

Au total: • la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale est: $x = 1$,

• la distance maximale est: $h(1) = e^{-1}$.

1. b. Plaçons sur le graphique, les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN:

Nous pouvons représenter les points M et N demandés sur le graphique suivant:



Notons que les coordonnées des points M et N sont respectivement:

$$M(1;f(1)) \text{ cad } M(1;e^{-1}+\ln(2)) \text{ et } N(1;g(1)) \text{ cad } N(1;\ln(2)).$$

2. a. Hachurons le domaine D_λ:

Fait sur graphique précédent.

2. b. Démontrons que $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \frac{(\lambda + 1)}{e^\lambda}$:

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ du domaine délimité par les courbes Cf et Cg et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$, est telle que:

$\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\, dx.$

Or: $\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - g(x))\, dx \iff \mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (h(x))\, dx$

$\iff \mathcal{A}_\lambda = [\, H(x)\,]_0^\lambda$ (d'après 3.)

$\iff \mathcal{A}_\lambda = [\, -(1 + x)\, e^{-x}\,]_0^\lambda$

$\Rightarrow \mathcal{A}_\lambda = 1 - (1 + \lambda)\, e^{-\lambda}.$

Au total, nous avons bien: $\mathcal{A}_\lambda = 1 - \frac{(1 + \lambda)}{e^\lambda}.$

2. c. Calculons la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ en $+\infty$ et interprétons le résultat:

$\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 1 - \frac{(1 + \lambda)}{e^\lambda}$

$= \lim\limits_{\lambda \to +\infty} 1 - \frac{1}{e^\lambda} - \frac{\lambda}{e^\lambda}.$

Or:
- $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{e^\lambda} = 0$ (d'après le cours),
- $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda}{e^\lambda} = 0$ (d'après le Théorème des croissances comparées).

D'où: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}_\lambda = 1.$

Au total: $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathscr{A}_\lambda = 1$ u.a.

Cela signifie que quand λ tend vers l'infini (" λ " très grand), l'aire de la zone hachurée $\mathscr{A}_\lambda$ tendra vers 1 u.a.

3. a. Déterminons la valeur affichée (de λ) par l'algorithme quand $S = 0,8$:

A l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, nous trouvons:

- quand $\lambda = 2$, $\mathscr{A}_2 < 0,8$ $\left(\mathscr{A}_2 = 1 - \frac{3}{e^2}\right)$
- quand $\lambda = 3$, $\mathscr{A}_3 \geqslant 0,8$ $\left(\mathscr{A}_3 = 1 - \frac{4}{e^3}\right)$.

Au total, la valeur affichée par l'algorithme quand $S = 0,8$ est: $\lambda = 3$.

3. b. Déterminons le rôle de cet algorithme:

Le rôle de cet algorithme est d'afficher la première valeur entière de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda \geqslant S$.