Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE, BAC S

- Droites et Plans
- Triangle rectangle, Théorème de Pythagore
- Triangle isocèle
- Tétraèdre
- Distance entre deux points
- Vecteurs colinéaires ou coplanaires
- Droites sécantes
- Produit scalaire et Norme d'un vecteur
- Vecteurs orthogonaux
- Représentation paramétrique d'une droite
- Equation cartésienne d'un plan
- Théorème du Toit

EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2019]

Partie A: Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A $(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ $(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (AB) passe par le point A $(2 ; 4 ; 0,25)$,

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AB) est: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 6 - 4 \\ 0,75 - 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

D'où une représentation paramétrique de la droite (AB) passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ $(0 ; 2 ; 0,5)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Au total, une représentation paramétrique de la droite (AB) est:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

2. a. Justifions que le vecteur $\vec{n}$ (0; 1; -1) est un vecteur normal au plan (PQU):

D'après le cours: un vecteur $\vec{n}$ (0; 1; -1) est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

Ici:
- il s'agit du plan (PQU);
- 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PU}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $\vec{n}$ (0; 1; -1).

De plus:
- $\vec{n}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux car: $(0 \times 0) + (1 \times 1) + (-1 \times 1) = 0$;
- $\vec{n}$ et $\overrightarrow{PU}$ sont orthogonaux car: $(0 \times 10) + (1 \times 0) + (-1 \times 0) = 0$.

Ainsi: $\vec{n}$ est bien normal au plan (PQU).

Au total: le vecteur $\vec{n}$ (0; 1; -1) est bien un vecteur normal au plan (PQU).

2. b. Déduisons-en une équation cartésienne du plan (PQU):

Ici:
- $\vec{n}$ $(a = 0;\ b = 1;\ c = -1)$;
- U (10; 10; 0) est un point de l'espace.

D'où une équation cartésienne du plan passant par U et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a(x - x_U) + b(y - y_U) + c(z - z_U) = 0$

$\Leftrightarrow$ $0(x - 10) + 1(y - 10) + (-1)(z - 0) = 0$

$\Leftrightarrow$ $y - z - 10 = 0$.

En conclusion, une équation cartésienne du plan (PQU) est: $y - z - 10 = 0$.

3. **Démontrons que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants cad se coupent au point $I\left(2 ; \frac{37}{3} ; \frac{7}{3}\right)$:**

Donc: **" I est le point d'intersection du plan (PQU) et de la droite (AB) ".**

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit $I(x_I ; y_I ; z_I)$, un point appartenant à la droite (AB).

I appartient aussi au plan (PQU) ssi ses coordonnées vérifient: $y - z - 10 = 0$.

D'où: $y_I - z_I - 10 = 0 \Leftrightarrow (4 + 2t) - (0,25 + 0,5t) - 10 = 0$ cad: $t = \frac{25}{6}$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point I sont:

$$\begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = 4 + 2 \times \frac{25}{6} = \frac{37}{3} \\ z_I = 0,25 + 0,5 \times \frac{25}{6} = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

Au total, les coordonnées du point I sont: $\left(2\,;\dfrac{37}{3}\,;\dfrac{7}{3}\right)$.

4. Expliquons pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle:

En suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle car: les points se situant sur l'obstacle PQTU **ont une cote comprise entre 0 et 1**. Or le point I, intersection des droites (AB), décrivant la trajectoire du drone d'Alex, et du plan (PQU), dont l'obstacle est le rectangle PQTU, **a une cote de $\dfrac{7}{3} > 2$**, donc ne peut se situer sur le rectangle PQTU.

Partie B: Distance minimale entre les deux trajectoires

1. Montrons que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;2-2a\,;-0,5a)$:

D'après l'énoncé:
- $M \in (AB)$,
- $N \in (CD)$,
- $\overrightarrow{AM} = a \cdot \overrightarrow{AB}$,
- $\overrightarrow{CN} = b \cdot \overrightarrow{CD}$.

Dans ces conditions, en ayant recours à la relation de Chasles, nous avons:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$$

$$= -a \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + b \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$= -a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2b \\ -2a+2 \\ -0,5a \end{pmatrix}.$$

Ainsi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont bien: $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0,5a)$.

2. Montrons que la distance MN est minimale quand $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$:

D'après l'énoncé, la distance MN est minimale quand:

- (MN) et (AB) sont perpendiculaires,
- (MN) et (CD) sont perpendiculaires.

Dans ces conditions:

- (MN) et (AB) sont perpendiculaires ssi:

$$[(2-2b)\times 0] + [(-2a+2)\times 2] + [(-0,5a)\times 0,5] = 0$$

cad: $-4,25a + 4 = 0$ **ou encore**: $\mathbf{a = \frac{4}{4,25} = \frac{16}{17}}$.

- (MN) et (CD) sont perpendiculaires ssi:

$$[(2-2b)\times(-2)] + [(-2a+2)\times 0] + [(-0,5a)\times 0] = 0$$

cad: $-4 + 4b = 0$ **ou encore**: $\mathbf{b = 1}$.

Au total la distance est bien minimale quand: $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.

3. Déduisons-en la valeur minimale de la distance MN et concluons:

Comme $\mathbf{a = \frac{16}{17}}$ et $\mathbf{b = 1}$: $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{17} \\ -\frac{8}{17} \end{pmatrix}$.

Ainsi, la distance MN est: $d = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(-\frac{8}{17}\right)^2}$

$$= \frac{2\sqrt{17}}{17} \text{ (x 10 mètres).}$$

Au total, la valeur minimale de la distance MN est: $\frac{20\sqrt{17}}{17}$ mètres.

Or: $\frac{20\sqrt{17}}{17} \approx 4,85$ mètres $>$ 4 mètres.

Donc la consigne d'imposer une distance minimale de 4 mètres entre les 2 drones est bien respectée.