Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

Sujets Mathématiques Bac 2017
freemaths.fr
Antilles - Guyane

B A C C A L A U R É A T G É N É R A L

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

spécialité

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7
dont une ANNEXE qui n'est pas à rendre.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

freemaths.fr freemaths.fr

Exercice 1 (3 *points*)

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct.
On considère l'équation

$$(E) : \; z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

EXERCICE 1

[Antilles-Guyane 2017]

1. Donnons une solution entière de (E):

L'équation (E) est: $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

En tâtonnant, nous trouvons que $z = 1$ est une solution entière de (E).

Au total, une solution entière de (E) est: $z = 1 \in \mathbb{R}$.

2. Démontrons que, pour tout nombre complexe z, l'égalité (1) est vérifiée:

Soit (1), l'égalité: $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

$$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2$$

$$= z^4 + 2z^3 - z - 2.$$

Au total: l'égalité (1) est bien vérifiée.

3. Résolvons l'équation E dans l'ensemble des nombres complexes:

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre 2 équations:

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad z^2 + z + 1 = 0.$$

- Soit l'équation: $z^2 + z - 2 = 0$.

$\Delta = 9 > 0 \iff \Delta = (3)^2 > 0$.

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = \dfrac{-1-3}{2} \Rightarrow z_1 = -2,$

- $z_2 = \dfrac{-1+3}{2} \Rightarrow z_2 = 1.$

- Soit l'équation: $z^2 + z + 1 = 0.$

$\Delta = -3 < 0 \iff \Delta = (\sqrt{3}\,i)^2 < 0.$

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow z_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i,$

- $z_4 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow z_4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i.$

Au total, 4 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = -2$

- $z_2 = 1$

- $z_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i$

- $z_4 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i.$

4. Le quadrilatère ABCD est-il un losange ?

Soient les points: $A\,(1)$, $B\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i\right)$, $C\,(-2)$ et $D\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i\right)$.

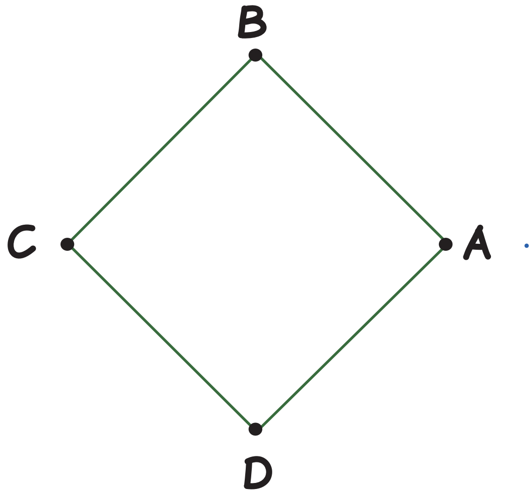
Le quadrilatère ABCD est un losange ssi:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,

- $(BD) \perp (CA)$

avec:



Or: • $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ssi $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$. (formule de cours)

Ici: $z_{\overrightarrow{AB}}\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = \left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$.

Donc: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

• $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ssi $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$. (formule de cours)

Ici: $z_{\overrightarrow{AD}}\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = \left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$.

Donc: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

• $(BD) \perp (CA)$ ssi $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur. (formule de cours)

Ici: $$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{1-(-2)}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)}$$

$$= \frac{3}{-\sqrt{3}\cdot i}$$

$$= \sqrt{3}\cdot i.$$

Donc: $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur.

Au total, comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $(BD) \perp (CA)$:

le quadrilatère ABCD est bien un losange.