Corrigé

Exercice 4

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **7**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7
dont une ANNEXE qui n'est pas à rendre.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 4 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif.
Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n) : \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$.
On a donné en **ANNEXE**, qui n'est pas à rendre, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ notée α_n.

2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geq 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).

- **a.** Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$ et $y = \frac{1}{5}$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).
- **b.** Comparer, pour tout entier $n \geq 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).
- **c.** En déduire que la suite (α_n) converge.
Il n'est pas demandé de calculer sa limite.

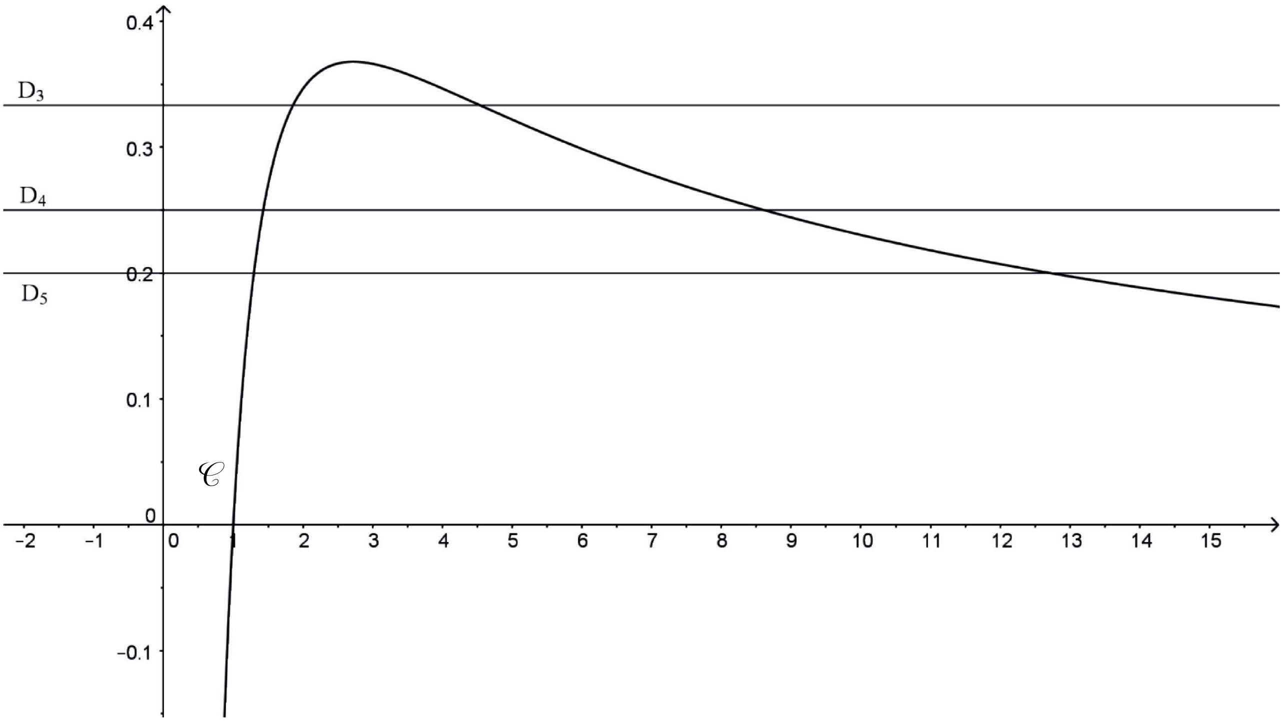
3. On admet que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leq \alpha_n \leq \mathrm{e} \leq \beta_n .$$

- **a.** On admet que la suite (β_n) est croissante.
Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,
$$\beta_n \geq n\frac{\beta_3}{3} .$$
- **b.** En déduire la limite de la suite (β_n).

ANNEXE de l'exercice 4

Cette annexe n'est pas à rendre.



EXERCICE 4

[Antilles-Guyane 2017]

Partie A:

1. Etudions le sens de variation de la fonction f:

• Calculons f':

Ici: • $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

• $Df =]\, 0 ; +\infty\, [$.

D'après l'énoncé, la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]\, 0 ; +\infty\, [$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in\,]\, 0 ; +\infty\, [$.

Pour tout $x \in\,]\, 0 ; +\infty\, [$: $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}.$$

Au total: pour tout $x \in\,]\, 0 ; +\infty\, [$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\ln x}{x^2}$.

• Étudions le signe de f' sur $]\, 0 ; +\infty\, [$:

Pour tout $x \in\,]\, 0 ; +\infty\, [$, nous allons distinguer 3 cas.

• **1er cas**: $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0$ ssi $\frac{1}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$, cad: $x = e$.

• **2ème cas**: $f'(x) < 0$.

$f'(x) < 0$ ssi $\frac{1}{x^2} < \frac{\ln x}{x^2}$ <=> $\ln x > 1$, cad: $x > e$.

• **3ème cas**: $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0$ ssi $\frac{1}{x^2} > \frac{\ln x}{x^2}$ <=> $\ln x < 1$, cad: $x < e$.

Au total: • f est décroissante sur $[\, e ; +\infty\, [$,

(car sur $[\, e ; +\infty\, [$, $f'(x) \leqslant 0$)

• f est croissante sur $]\, 0 ; e\,]$.

(car sur $]\, 0 ; e\,]$, $f'(x) \geqslant 0$)

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	0		e		$+\infty$
f'		+	0	-	
f	a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ => $a = -\infty$, d'après le cours,

• $b = f(e)$ => $b = \frac{1}{e}$,

• $c = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ => $c = 0$, d'après TCC.

2. **Déterminons le maximum de f :**

D'après le tableau de variation, la fonction f est maximale en b, donc quand: $x = e$.

Au total: • la fonction f est maximale quand $x = e$,

• dans ce cas, $f(x_{max}) = \frac{1}{e}$.

Partie B:

1. **Montrons que, pour $n \geqslant 3$, $f(x) = \frac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1 ; e]$:**

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

> • Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$.
>
> Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a ; b]$ tel que: $f(c) = K$.
>
> Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a ; b]$.
>
> • Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a ; b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a ; b]$.

Ici: • f est continue sur $[1 ; e]$ et est strictement croissante sur $[1 ; e]$.

De plus: • sur $[1 ; e]$, " $K = \frac{1}{n}$ " est compris entre $f(1)$ et $f(e)$.

En effet: $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{e}$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$, avec $n \geqslant 3$, admet une solution unique appartenant à $[1; e]$.

Au total: l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet bien une unique solution α_n sur $[1; e]$.

2. a. Conjecturons le sens de variation de la suite (α_n):

Sur $[1; e]$, soient les abscisses:

- α_3 du point d'intersection entre D_3 et la courbe $\mathscr{C}$,
- α_4 du point d'intersection entre D_4 et la courbe $\mathscr{C}$,
- α_5 du point d'intersection entre D_5 et la courbe $\mathscr{C}$.

Nous avons: $\alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$.

Dans ces conditions, la conjecture que nous pouvons émettre sur le sens de variation de la suite (α_n) est:

" on pourrait, a priori, penser que la suite (α_n) est décroissante ".

2. b. b1. Comparons $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$, pour tout entier $n \geqslant 3$:

Pour tout entier $n \geqslant 3$: $f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$$= -\frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Au total, comme $f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n) < 0$, nous pouvons affirmer que:

$f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$, pour tout entier $n \geqslant 3$.

2. b. b2. Déterminons le sens de variation de la suite (α_n):

Pour tout entier $n \geqslant 3$: $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$.

Comme f est strictement croissante sur $[1; e]$, nous pouvons écrire:

sur $[1; e]$, $\alpha_n > \alpha_{n+1} \Rightarrow f(\alpha_n) > f(\alpha_{n+1})$.

Ainsi: pour tout entier $n \geqslant 3$, la suite (α_n) est strictement décroissante car

$$\alpha_n > \alpha_{n+1}.$$

2. c. Déduisons-en que la suite (α_n) est convergente:

Nous savons que, pour tout entier $n \geqslant 3$:

- $1 \leqslant \alpha_n \leqslant e$.

  Donc la suite (α_n) est minorée par $n = 1$.

- $\alpha_{n+1} < \alpha_n$.

  Donc la suite (α_n) est strictement décroissante.

Dans ces conditions, la suite (α_n) étant strictement décroissante et minorée, elle est convergente.

3. a. Montrons que pour tout entier $n \geqslant 3$, $\beta_n \geqslant n\dfrac{\beta_3}{3}$:

La suite (β_n) est croissante, pour tout entier $n \geqslant 3$.

D'où, pour tout entier $n \geqslant 3$: $\beta_{n+1} \geqslant \beta_n$.

Nous pouvons aussi écrire, pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\beta_n \geqslant \beta_{n-1} \text{ ou } \beta_n \geqslant \beta_{n-2} \dots \text{ ou } \beta_n \geqslant \beta_3.$$

Comme la fonction f est croissante sur $[1; e]$, nous pouvons écrire:

$$f(\beta_n) \geq f(\beta_3) \text{ cad } \frac{\ln(\beta_n)}{n} \geq \frac{\ln(\beta_3)}{3} \quad (a).$$

La fonction " ln " étant croissante sur $]0; +\infty[$:

$$(a) \iff \frac{\ln(\beta_n)}{n} \geq \frac{\ln(\beta_3)}{3} \Rightarrow \frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3} \Rightarrow \beta_n \geq \frac{n \cdot \beta_3}{3}.$$

Au total, pour tout entier $n \geq 3$: $\beta_n \geq \dfrac{n \cdot \beta_3}{3}$.

3. b. Déduisons-en la limite de la suite (β_n):

En $+\infty$, comme $\beta_n \geq \dfrac{n \cdot \beta_3}{3}$, calculer la limite de β_n revient à calculer la limite de $\dfrac{n \cdot \beta_3}{3}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n \cdot \beta_3}{3} = +\infty.$$

Donc la suite (β_n) est divergente.