Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures.** – COEFFICIENT : **9**

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 *points*)

Commun à tous les candidats

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

- A « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève une ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   - **a.** Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   - **b.** Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
   - **c.** L'ampoule tirée est sans défaut.
     Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$.
   - **a.** Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.
   - **b.** Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous réels positifs *t* et a on a
     $$P_{T\geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
   a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
   b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5\,000)$.
   c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

EXERCICE 1

[Antilles - Guyane 2016]

Partie A: Les ampoules

1. a. Construisons un arbre pondéré représentant la situation:

D'après l'énoncé, nous avons:

- A = " l'ampoule provient de la machine A ".
- B = " l'ampoule provient de la machine B ".
- D = " l'ampoule présente un défaut ".
- $\bar{D}$ = " l'ampoule est sans défaut ".

- $P(A) = 65\%$
- $P(B) = 35\%$

$(65\% + 35\% = 1)$.

- $P_A(D) = 8\%$
- $P_A(\bar{D}) = 92\%$

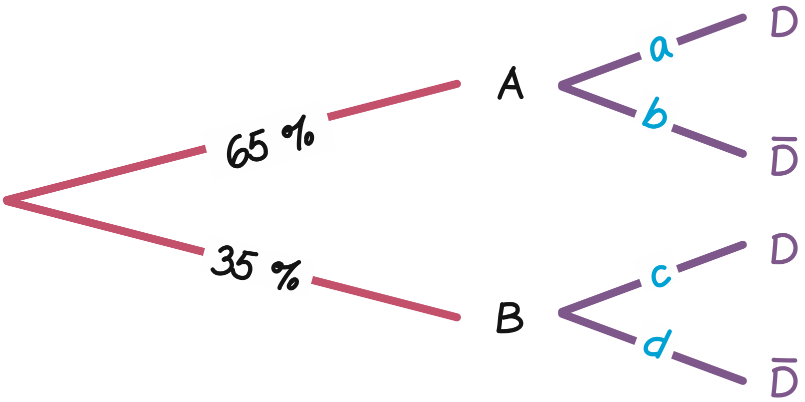
$(8\% + 92\% = 1)$.

- $P_B(D) = 5\%$
- $P_B(\bar{D}) = 95\%$

$(5\% + 95\% = 1)$.

Nous pouvons représenter la situation par un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 8\ \%$
- $b = 92\ \%$
- $c = 5\ \%$
- $d = 95\ \%$

1. b. Montrons que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0. 9305:

Cela revient à montrer que: $P(\bar{D}) = 0.9305$.

L'événement $\bar{D} = (\bar{D} \cap A) \cup (\bar{D} \cap B)$.

D'où: $P(\bar{D}) = P(\bar{D} \cap A) + P(\bar{D} \cap B)$

$= P_A(\bar{D}) \times P(A) + P_B(\bar{D}) \times P(B)$.

Ainsi: $P(\bar{D}) = 92\% \times 65\% + 95\% \times 35\%$

$\Rightarrow$ $P(\bar{D}) = 0.9305$.

Au total, il y a 93. 05% de chance de tirer une ampoule sans défaut.

1. c. Calculons la probabilité que l'ampoule tirée sans défaut provienne de la machine A:

Cela revient à calculer: $P_{\bar{D}}(A)$.

$$P_{\bar{D}}(A) = \frac{P(\bar{D} \cap A)}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{P_A(\bar{D}) \times P(A)}{P(\bar{D})}.$$

Ainsi: $P_{\overline{D}}(A) = \dfrac{92\% \times 65\%}{93.05\%}$ => $P_{\overline{D}}(A) \approx 64.26\%$.

Au total, il y a 64.26% de chance que l'ampoule tirée sans défaut provienne de la machine A.

2. Calculons la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut:

Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever au hasard 10 ampoules dans la production d'une journée à la sortie de la machine A.

Soient les événements D = " l'ampoule présente un défaut ", et $\overline{D}$ = " l'ampoule est sans défaut ".

On désigne par X le nombre d'ampoules sans défaut contenues dans ce lot de 10 ampoules.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ D, \overline{D} \}$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., 10\}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de $\overline{D}$ suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 10$ et $p = 0.92$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(10\,;0.92)$.

En fait, on répète 10 fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer:

$P(X \geq 9)$ avec: $X \rightsquigarrow B(10\,;0.92)$.

Or: $P(X \geq 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$

$$= \binom{10}{9}(0.92)^9(1 - 0.92)^1 + \binom{10}{10}(0.92)^{10}$$

=> $P(X \geq 9) \approx 0.8121$.

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, il y a 81.21% de chance d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

EXERCICE 1

[Antilles-Guyane 2016]

Partie B: Durée de vie d'une ampoule

1. a. Montrons que $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = ?$

Dans ces conditions:

- $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, $\forall\, x \in [0, +\infty[$.
- $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.
- $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$.

Il s'agit de calculer: $P(T \geqslant a)$.

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a)$$

$$= 1 - \int_0^a \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

$$= 1 - \lambda \left[-\frac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x} \right]_0^a$$

$$= 1 + [e^{-\lambda x}]_0^a$$

$$= 1 + (e^{-\lambda a} - 1)$$

$\Rightarrow \; P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$.

Au total, nous avons bien: $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$.

1. b. Montrons que $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+a) = P(T \geqslant a)$:

Notons que: $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$ et $P(T \geqslant t) = e^{-\lambda t}$.

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t + a) = \frac{P[(T \geqslant t+a) \cap (T \geqslant t)]}{P(T \geqslant t)}$$

$$= \frac{P(T \geqslant t+a)}{P(T \geqslant t)} \quad \text{car: } t + a \geqslant t$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda a}.$$

Or: $P(T \geqslant a) = e^{-\lambda a}$.

Par conséquent, l'égalité est bien vérifiée.

Au total, pour tous t et a positifs: $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+a) = P(T \geqslant a)$.

2. a. Déterminons la valeur de λ:

$E(T) = 10\,000$.

Or, d'après le cours, $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Par conséquent: $\lambda = 0,0001$.

Au total, la valeur exacte de λ est: $\lambda = 0,0001$.

2. b. Calculons $P(T \geqslant 5\,000)$:

$P(T \geqslant 5000) = e^{-\lambda \times 5000}$

$= e^{-0,5}$

$\Rightarrow \; P(T \geqslant 5000) \approx 60,65\%.$

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 60, 65%.

2. c. Déterminons la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures, sachant que l'ampoule a déjà fonctionné 7000 heures:

Il s'agit de calculer: $P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000)$.

D'après la question **1. b.**:

$$P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000) = P(T \geqslant 5000).$$

En effet, la loi exponentielle est la loi de durée sans vieillissement.

Ainsi: $P_{T \geqslant 7000}(T \geqslant 12\,000) \approx 60,65\%.$

Au total, la probabilité demandée est d'environ: 60, 65%.

Partie C: Qualité de la production

1. Déterminons un intervalle de fluctuation asymptotique:

Ici, nous avons:
- $n = 1000$
- $p = 6\%$
- $f = \dfrac{71}{1000} \Rightarrow f = 7,1\%.$

Dans ces conditions:

$$n = 1000 \geqslant 30, \; n\,.\,p = 60 \geqslant 5 \; \text{ et } \; n\,.\,(1-p) = 940 \geqslant 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 1000 ampoules parmi toutes les ampoules.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} ; p + 1,96 \times \left(\frac{p\,(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$I = [\ 4,53\% \ ; 7,47\%\ ].$$

2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

La fréquence " f " d'ampoules défectueuses, sur l'échantillon est telle que:

$$f = 7,1\% \in I.$$

Ainsi, il n'y a aucune raison de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.