Corrigé
Exercice 3

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT S

SUITES NUMÉRIQUES, BAC S

- Suite arithmétique
- Suite géométrique
- Calcul de U_0, U_1 et U_2
- Raison et premier terme d'une suite
- Suite croissante, décroissante
- Majorant, minorant
- Démonstration par Récurrence
- Expression de U_n en fonction de n
- Suite convergente
- Théorème des gendarmes
- Limites
- Algorithmes

EXERCICE 3

[Amérique du Nord 2019]

Partie A: Établir une inégalité

1. Étudions le sens de variation de la fonction f sur $[\,0; +\infty\,[$:

• **Calculons f':**

Ici: • $f(x) = x - \ln(x+1)$ [u - ln (v)]

• $Df = [\,0; +\infty\,[$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[\,0; +\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0; +\infty\,[$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ $\left[u' - \dfrac{v'}{v}\right]$

cad: $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

Au total: pour tout $x \in [\,0; +\infty\,[$: $f'(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

• **Étudions le signe de f' sur $[\,0; +\infty\,[$:**

Sur $[\,0; +\infty\,[$: $f'(x) \geqslant 0$.

Ainsi: f est croissante sur $[\,0; +\infty\,[$.

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	0	$+\infty$
f'	0 +	
f	0 ↗	$+\infty$

, car: $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x+1) = +\infty$.

2. Déduisons-en que pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty\, [$, $\ln(x+1) \leqslant x$:

D'après le tableau de variation précédent, nous avons pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty\, [$:

$$f(x) \geqslant 0 = f(0) \iff x - \ln(x+1) \geqslant 0$$

$$\iff x \geqslant \ln(x+1) \text{ ou: } \ln(x+1) \leqslant x.$$

Au total, pour tout $x \in [\, 0 ; +\infty\, [$, nous avons bien: $\ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B: Application à l'étude d'une suite

1. Calculons une valeur approchée à 10^{-3} près de U_2:

Ici:
- $U_{n+1} = U_n - \ln(1 + U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 1$.

Dans ces conditions:

- $U_1 = U_0 - \ln(1 + U_0) \iff U_1 = 1 - \ln(1+1)$ cad: $U_1 = 1 - \ln(2)$,
- $U_2 = U_1 - \ln(1 + U_1) \iff U_2 = (1 - \ln(2)) - \ln(1 + (1 - \ln(2)))$

  cad: $U_2 \approx 0,0382$.

Au total, une valeur approchée à 10^{-3} près de U_2 est environ: $0,0382$.

2. a. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \geqslant 0$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant 0$ ".

Initialisation: • $U_0 = 1 \geqslant 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = 1 - \ln(2) \geqslant 0$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geqslant 0$
et montrons qu'alors $U_{n+1} \geqslant 0$.

Supposons: $U_n \geqslant 0$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) => $1 + U_n \geqslant 1 + 0$

=> $\ln(1 + U_n) \geqslant \ln(1)$

=> $-\ln(1 + U_n) \leqslant 0$

=> $U_n - \ln(1 + U_n) \leqslant 1 - 0$

=> $0 \leqslant U_n - \ln(1 + U_n) \leqslant 1$, **d'après PARTIE A (question 2.)**

=> $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$

=> $U_{n+1} \geqslant 0$.

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 0$, **et même " $0 \leqslant U_n \leqslant 1$. "**

2. b. b1. Démontrons que la suite (U_n) est décroissante:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer le signe de: $U_{n+1} - U_n$.

$$U_{n+1} - U_n = U_n - \ln(1 + U_n) - U_n$$

$$= -\ln(1 + U_n).$$

Or, pour tout entier naturel n, $U_n \geqslant 0$.

D'où: $-\ln(1 + U_n) \leqslant 0$ cad: $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$.

Au total, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$:

la suite (U_n) est décroissante.

2. b. b2. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant 1$:

Comme déjà vu précédemment: **Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant 1$.**

2. c. Montrons que la suite (U_n) est convergente:

D'après le cours, nous savons que toute suite décroissante et minorée est convergente.

Or ici:
- $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Donc la suite (U_n) est décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- $0 \leqslant U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

  Donc la suite (U_n) est minorée par $m = 0$.

Dans ces conditions: la suite (U_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Déduisons-en la valeur de ℓ:

La suite (U_n) étant convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle admet pour limite:

$$\ell \geqslant 0 \quad \text{telle que} \quad \ell = f(\ell).$$

$\ell = f(\ell) \iff \ell = \ell - \ln(1 + \ell)$ cad: $\ell = 0$.

Au total: la suite (U_n) est convergente et converge vers $\ell = 0$.

4. Écrivons l'algorithme demandée:

L'algorithme demandée est le suivant:

```
N ← 0
U ← 1
Tant que   U ≥ 10^-p
    | U ← U - ln(1 + U)
    | N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```