Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

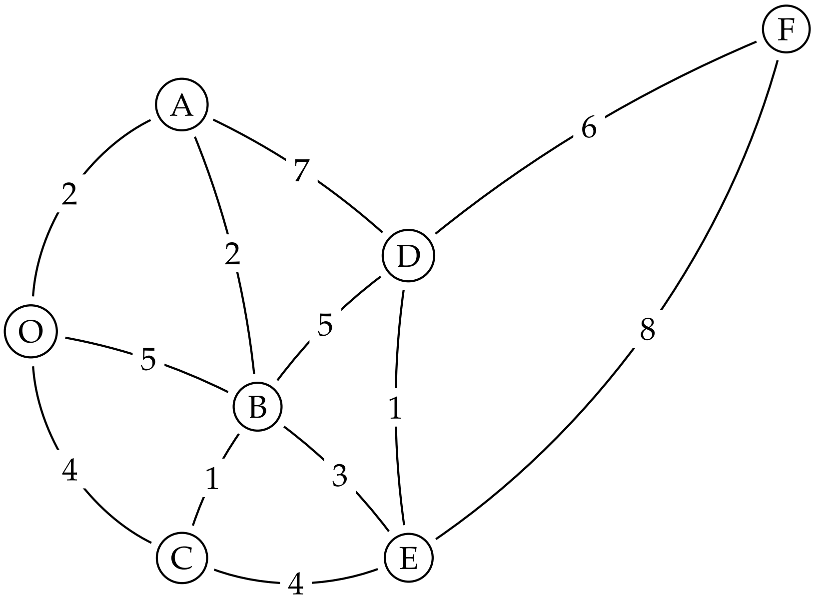
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

EXERCICE 3 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie.



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

Partie B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.

Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x−ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer $M \times A$.

b) Que représente la matrice M pour la matrice A ?

4. À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer les valeurs des nombres a, b et c.

5. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes.
Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3

[Polynésie 2017]

Partie A:

Déterminons le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre pour aller du point O au point F:

Après recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet pour aller de O à F, tout en combattant le plus faible nombre de créatures:

le trajet O - A - B - E - D - F.

Et ce trajet comportera: $2 + 2 + 3 + 1 + 6 = 14$ créatures à combattre.

Au total, le trajet qu'Alex doit suivre pour aller de O à F, tout en combattant le plus petit nombre de créatures est:

O - A - B - E - D - F, et Alex rencontrera 14 créatures.

~~Partie B~~:

1. Traduisons l'énoncé par un système de 3 équations à 3 inconnues:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, pour $x \in [1;\ 10]$,
- quand $x = 1$, $y = 8$,
- quand $x = 2$, $y = 25$,
- quand $x = 3$, $y = 80$.

Ainsi, nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} x=1,\ y=8 \\ x=2,\ y=25 \\ x=3,\ y=80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=25. \\ 9a+3b+c=80 \end{cases} \quad (I)$$

2. Vérifions que le système (I) peut s'écrire sous la forme $A\,X=B$:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad AX=B, \text{ avec: } \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Au total, nous avons bien: $(I) \Leftrightarrow AX=B$.

3. a. Calculons $M \times A$:

$$M \times A = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au total: $M \times A = I_3$, I_3 étant la matrice identité d'ordre 3.

3. b. Que représente la matrice M pour la matrice A ?

Comme $M \times A = I_3$, M représente la matrice inverse de A.

Et nous pouvons noter: $M = A^{-1}$ et $A^{-1} \times A = I_3$.

4. Déterminons les nombres a, b et c:

Nous savons que: $AX = B$.

D'où nous pouvons écrire: $AX = B \iff A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$

$\iff (A^{-1} \times A) \times X = A^{-1} \times B$

$\iff I_3 \times X = A^{-1} \times B$

$\implies X = M \times B$.

Au total: $X = M \times B \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$

$\implies \begin{cases} a = 19 \\ b = -40 \\ c = 29 \end{cases}.$

5. Le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours, si la capacité d'accueil est de 2 500 personnes ?

Pour répondre à cette question, nous allons dresser le tableau suivant:

x	4	5	6	7	8	9	10
y	173	304	473	680	925	1208	1529

, avec: $y = 19x^2 - 40x + 29$.

Comme les différentes valeurs de y obtenues sont toutes inférieures à 2 500 personnes, il n'y a aucun risque pour que le parc refuse d'accueillir des personnes un de ces dix jours.