Corrigé

Exercice 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5 (ES), 4(L)**

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
L : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur

• *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
• *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
• *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
• *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte **6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Les parties A et B sont indépendantes.

Sur une exploitation agricole, une maladie rend la conservation de fruits difficile. Un organisme de recherche en agronomie teste un traitement sur un champ : sur une partie du champ, les fruits sont traités, sur l'autre, non.

On considère que le nombre de fruits récoltés est extrêmement grand et que la maladie touche les fruits de manière aléatoire.

Partie A Étude de l'efficacité du traitement

On prélève au hasard 100 fruits sur la partie du champ traité et 100 fruits sur l'autre partie du champ. On constate que :

- sur l'échantillon des 100 fruits traités, 18 sont abimés ;
- sur l'échantillon des 100 fruits non traités, 32 sont abimés.

1. Déterminer un intervalle de confiance de la proportion de fruits abimés par la maladie au niveau de confiance de 95 % :

a. pour la partie du champ traitée ;

b. pour la partie du champ non traitée.

2. Au vu des intervalles obtenus à la question 1, peut-on considérer que le traitement est efficace ?

Partie B Qualité de la production

Une étude plus poussée permet d'estimer la proportion de fruits abimés à $0,12$ dans la partie du champ traitée et à $0,30$ dans la partie non traitée.
On sait de plus qu'un quart du champ a été traité.

Une fois récoltés, les fruits sont mélangés sans distinguer la partie du champ d'où ils proviennent.

On prélève au hasard un fruit récolté dans le champ et on note :
T l'évènement « Le fruit prélevé provient de la partie traitée » ;
A l'évènement « Le fruit prélevé est abimé ».

On arrondira les résultats au millième.

1. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

2. a. Calculer la probabilité que le fruit prélevé soit traité et abimé.

b. Montrer que $P(A) = 0,255$.

3. Un fruit prélevé au hasard dans la récolte est abimé. Peut-on affirmer qu'il y a une chance sur quatre pour qu'il provienne de la partie du champ traitée ?

4. Dans le but d'effectuer un contrôle, cinq fruits sont prélevés au hasard dans le champ. Calculer la probabilité qu'au plus un fruit soit abimé.

EXERCICE 2

[Polynésie 2015]

Partie A: Étude de l'efficacité du traitement

1. Déterminons un intervalle de confiance de la proportion de fruits abîmés par la maladie au niveau de confiance de 95%:

D'après le cours, un tel intervalle de confiance nous est donné par la formule:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

1. a. Pour la partie du champ traitée:

Dans ce cas: $n = 100$ et $f = 0,18$.

D'où: $I = \left[0,18 - \frac{1}{10} \,;\, 0,18 + \frac{1}{10} \right]$ cad: $I = [\, 0,08 \,;\, 0,28 \,]$.

Ainsi, pour la partie du champ traitée: $I = [\, 8\% \,;\, 28\% \,]$.

1. b. Pour la partie du champ non traitée:

Dans ce cas: $n = 100$ et $f = 0,32$.

D'où: $I' = \left[0,32 - \frac{1}{10} \,;\, 0,32 + \frac{1}{10} \right]$ cad: $I' = [\, 0,22 \,;\, 0,42 \,]$.

Ainsi, pour la partie du champ non traitée: $I' = [\, 22\% \,;\, 42\% \,]$.

2. Peut-on considérer que le traitement est efficace ?

Nous ne pouvons pas répondre à cette question car les deux intervalles I et I' ont une zone commune: $[\,22\%\,;\,28\%\,]$.

On aurait pu répondre que si I et I' étaient disjoints.

EXERCICE 2

[Polynésie 2015]

Partie B : Production et qualité

1. Représentons la situation par un arbre pondéré :

D'après l'énoncé, nous avons :

- T = " le fruit prélevé provient de la partie traitée ".
- $\overline{T}$ = " le fruit prélevé ne provient pas de la partie traitée ".
- A = " le fruit est abîmé ".
- $\overline{A}$ = " le fruit n'est pas abîmé ".

- $P(T) = 25\%$
- $P(\overline{T}) = 75\%$

$(25\% + 75\% = 1)$.

- $P_T(A) = 12\%$
- $P_T(\overline{A}) = 88\%$

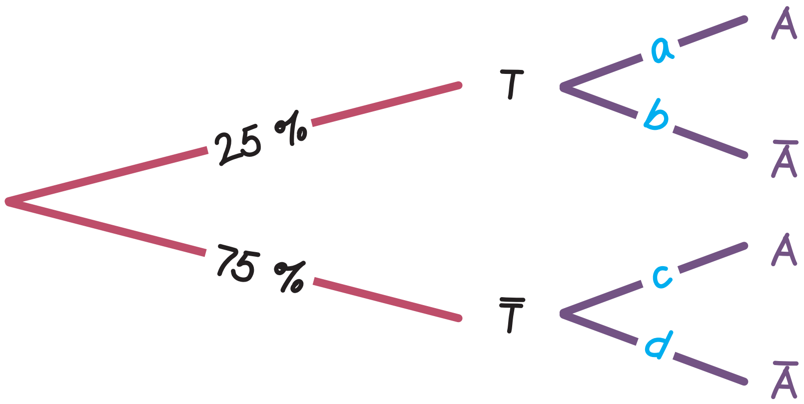
$(12\% + 88\% = 1)$.

- $P_{\overline{T}}(A) = 30\%$
- $P_{\overline{T}}(\overline{A}) = 70\%$

$(70\% + 30\% = 1)$.

Nous allons représenter la situation par un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 12\ \%$
- $b = 88\ \%$
- $c = 30\ \%$
- $d = 70\ \%$

2. a. Calculons la probabilité que le fruit prélevé soit traité et abîmé:

Cela revient à calculer: $P(T \cap A)$.

$P(T \cap A) = P_T(A) \times P(T)$.

Ainsi: $P(T \cap A) = 12\% \times 25\%$ => $P(T \cap A) = 3\%$.

Au total, il y a 3% de chance pour que le fruit prélevé soit traité et abîmé.

2. b. Montrons que $P(A) = 0.255$:

L'événement $A = (A \cap T) \cup (A \cap \overline{T})$.

D'où: $P(A) = P(A \cap T) + P(A \cap \overline{T})$

$= P(T \cap A) + P_{\overline{T}}(A) \times P(\overline{T})$.

Ainsi: $P(A) = 3\% + 30\% \times 75\%$

=> $P(A) = 25.5\%$.

Au total, il y a 25.5% de chance pour que le fruit soit abîmé.

3. Peut-on affirmer que $P_A(T) = 25\%$?

$$P_A(T) = \frac{P(A \cap T)}{P(A)} \iff P_A(T) = \frac{P(T \cap A)}{P(A)}.$$

Ainsi: $P_A(T) = \dfrac{3\%}{25.5\%} \implies P_A(T) = 12\%$.

Comme $12\% \neq 25\%$, la réponse est: non.

4. Calculons la probabilité qu'au plus un fruit soit abîmé:

Soit l'expérience aléatoire consistant à prélever au hasard un lot de 5 fruits dans le champ.

Soient les événements A = " le fruit est abîmé ", et $\bar{A}$ = " le fruit n'est pas abîmé ".

On désigne par X le nombre de fruits abîmés contenus dans ce lot de 5 fruits.

Nous sommes en présence de 5 épreuves aléatoires indépendantes avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

En fait on répète 5 fois un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 5$ et $p = 25.5\%$.

Et nous pouvons noter: $X \leadsto B(5 ; 25.5\%)$.

Ici nous devons calculer: $P(X \leq 1)$, avec: $X \leadsto B(5 ; 25.5\%)$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \binom{5}{0}(25.5\%)^0(1 - 25.5\%)^5 + \binom{5}{1}(25.5\%)^1(74.5\%)^4$$

$\Rightarrow P(X \leq 1) \approx 0.622.$

(à l'aide de la machine à calculer)

Au total, il y a 62.2% de chance pour que:

" au plus un fruit soit abîmé, sur 5 fruits prélevés ".