Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES

AU BACCALAURÉAT ES

MATRICES ET SUITES, BAC ES

- Graphe probabiliste
- Ordre d'un graphe
- Graphe connexe
- Graphe complet
- Sommets
- Arêtes
- Matrice de transition
- Matrice d'adjacence
- Chaîne eulérienne
- Cycle eulérien
- Théorème d'Euler
- État stable
- Algorithme de Dijkstra

EXERCICE 2

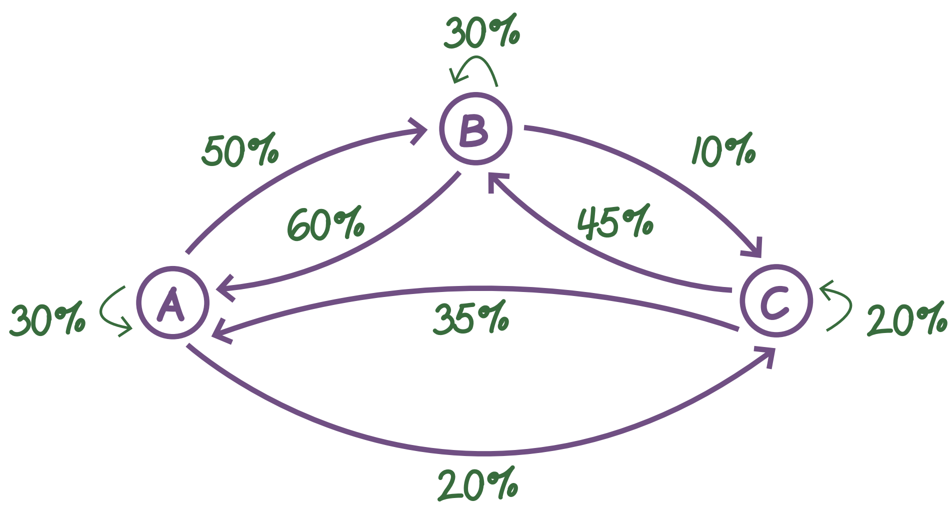
[Liban 2019]

Partie 1:

1. Représentons cette situation pour un graphe probabiliste:

Soient:
- A, l'état: " Choisir le plat A ",
- B, l'état: " Choisir le plat B ",
- C, l'état: " Choisir le plat C ".

Le graphe probabiliste G est le suivant:



2. Donnons la matrice de transition M de ce graphe:

La matrice associée à ce graphe probabiliste ou matrice de transition M est:

$$M = \begin{pmatrix} 30\% & 50\% & 20\% \\ 60\% & 30\% & 10\% \\ 35\% & 45\% & 20\% \end{pmatrix}.$$

3. Calculons P_2:

Ici, nous devons calculer: $P_2 = (a_2 \quad b_2 \quad c_2)$.

D'après le cours: $P_2 = P_1 \times M^{(2-1)}$ **cad** $P_2 = P_1 \times M^1$.

Or: $P_1 = (35,5\% \quad 40,5\% \quad 24\%)$.

D'où: $P_2 = (35,5\% \quad 40,5\% \quad 24\%) \times \begin{pmatrix} 30\% & 50\% & 20\% \\ 60\% & 30\% & 10\% \\ 35\% & 45\% & 20\% \end{pmatrix}$

$= (0,4335 \quad 0,407 \quad 0,1595)$.

Donc: $a_2 = 43,35\%$, $b_2 = 40,7\%$ et $c_2 = 15,95\%$.

Au total, le second jour: $P_2 = (43,35\% \quad 40,7\% \quad 15,95\%)$.

Cela signifie que le second jour, parmi les clients:

- ***43,35% ont choisi le plat A***
- ***40,7% ont choisi le plat B***
- ***15,95% ont choisi le plat C.***

4. Le restaurateur a-t-il raison ?

Pour répondre à cette question, nous allons calculer:

$\mathbf{P_{12}}$ et $\mathbf{P_{13}}$ et procéder à une comparaison.

- $\mathbf{P_{12}} = P_{11} \times M$ **ou**: $\mathbf{P_{12}} = P_1 \times M^{12-1}$ **cad**: $\mathbf{P_{12}} = P_1 \times M^{11}$.
- $\mathbf{P_{13}} = P_{12} \times M$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

- $P_{12} \approx (43,1\% \quad 41\% \quad 15,9\%)$,
- $P_{13} \approx (43,1\% \quad 41\% \quad 15,9\%)$.

Au total, nous pouvons affirmer que: **oui**, le restaurateur a raison car les douzième et treizième jours, la proportion de clients qui choisiront le plat C sera la même et sera égale à environ **15, 9%**.

Partie 2:

1. a. Montrons qu'il existe un parcours qui emprunte toutes les rues une et une seule fois:

Cela revient à déterminer si le graphe admet **une chaîne eulérienne**.

D'après le cours:

Le graphe étant connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Zéro ou deux sommets (et deux seulement) X et Y du graphe sont de degré impair.
- Le graphe admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y.

Or ici: **le graphe (d'ordre 8) est connexe car il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.**

Et, nous avons le tableau des sommets degrés suivant:

Sommets	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8
Degrés	3	4	6	2	2	3	4	2

(degré d'un sommet = nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité)

Comme il y a 2 sommets et deux seulement H_1 et H_6 qui sont de degré impair, d'après le **théorème d'Euler**, le graphe admet une chaîne eulérienne.

Donc: **oui**, il existe bien un parcours qui emprunte toutes les rues une et une seule fois.

1. b. Un tel parcours peut-il partir de H_1 et y revenir ?

Un tel parcours peut partir de H_1 et y revenir ssi il existe un cycle eulérien pour ce graphe connexe.

D'après le cours: **un graphe connexe contient un cycle eulérien ssi tous ses sommets sont de degré pair**.

Or ici, tous les sommets ne sont pas de degré pair.

Par conséquent: ce graphe n'admet pas de cycle eulérien.

Ainsi: **impossible** pour le parcours de partir de H_1 et d'y revenir !

2. Déterminons le temps minimal pour aller de H_4 à H_8:

Notons que: le livreur du restaurant se trouve en H_4 et désire se rendre le plus rapidement possible (minimisation du temps) en H_8.

Après avoir recours à l'algorithme de **Dijkstra**, nous trouvons comme trajet que le livreur doit suivre pour aller de H_4 à H_8, tout en minimisant le temps écoulé: le trajet $H_4 - H_5 - H_3 - H_7 - H_8$.

Et ce trajet durera: 15 mn + 7 mn + 4 mn + 9 mn = 35 minutes.

En effet, **l'algorithme de Dijkstra** est le suivant:

From ... to	H_1	H_2	H_3	H_5	H_6	H_7	H_8
H_4	$8H_4$	∞	∞	$15H_4$	∞	∞	∞
H_1 (8)		$17H_1$	$24H_1$	$15H_4$	∞	∞	∞
H_5 (15)		$17H_1$	$22H_5$		∞	∞	∞
H_2 (17)			$22H_5$		$34H_2$	$28H_2$	∞
H_3 (22)					$27H_3$	$26H_3$	$50H_3$
H_7 (26)					$27H_3$		$35H_7$
H_6 (27)							$35H_7$

Au total, le trajet que le livreur doit suivre pour aller de H_4 à H_8, tout en minimisant le temps écoulé est:

$H_4 - H_5 - H_3 - H_7 - H_8$, et ce trajet durera **35 minutes**.