Corrigé

Exercice 4

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2017

MATHÉMATIQUES
- Série ES -

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
- Série L -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

***Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.***

***Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.***

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1 à 6.

freemaths.fr

EXERCICE 4 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties sont liées.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par $f(x) = \frac{1}{0{,}5+100\mathrm{e}^{-x}}$.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle [0 ; 10] .

1) Montrer que, pour tout réel x dans l'intervalle [0 ; 10], on a $f'(x) = \frac{100\mathrm{e}^{-x}}{(0{,}5+100\mathrm{e}^{-x})^2}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur l'intervalle [0 ; 10] .
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{100\mathrm{e}^{-x}\times(\,100\mathrm{e}^{-x}-0{,}5)}{(0{,}5+100\mathrm{e}^{-x})^3} .$$

2) a) Montrer que, dans l'intervalle [0 ; 10], l'inéquation $100\mathrm{e}^{-x} - 0{,}5 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $x \leq -\ln(0{,}005)$.

b) En déduire le tableau de signes de la fonction f''sur l'intervalle [0 ; 10] .

3) On appelle C_f la courbe représentative de f tracée dans un repère.
Montrer, à l'aide de la question 2, que la courbe C_f admet un point d'inflexion noté I, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4) En utilisant les résultats de la question 2, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est concave.

Partie B

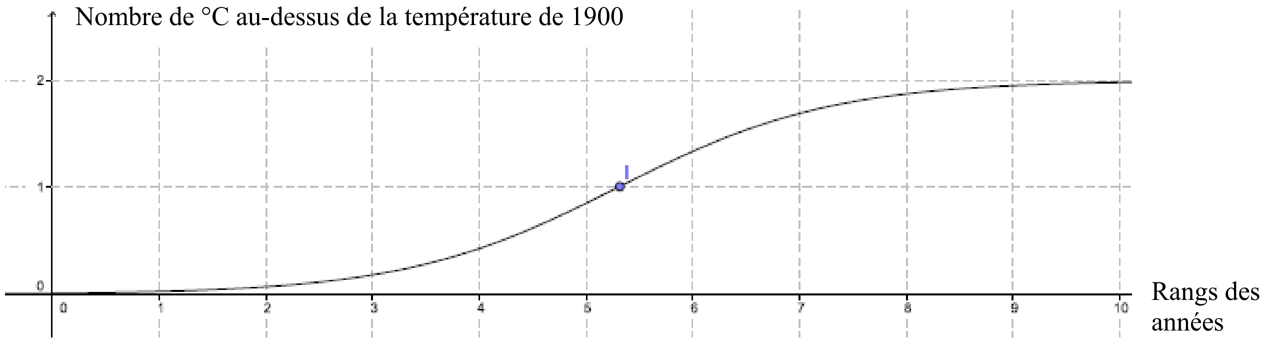
Dans toute cette partie les températures seront exprimées en degrés Celsius, notés °C.

La COP21, conférence sur les changements climatiques des Nations Unies, a adopté le 12 décembre 2015 le premier accord universel sur le climat, appelé accord de Paris, signé par 195 pays.

Cet accord confirme l'objectif, d'ici l'année 2100, que la température terrestre ne dépasse pas de plus de 2°C la température de l'année 1900.

Dans cette partie, on modélise, par la fonction f de la partie A, une évolution de température possible permettant d'atteindre l'objectif de l'accord de Paris.

La courbe représentative C_f de la fonction f est tracée ci-dessous, et I est son point d'inflexion.
Sur l'axe des abscisses, l'année 1900 correspond à 0 et une unité représente 25 ans, donc l'année 1925 correspond à 1.
Sur l'axe des ordonnées, on a représenté le nombre de degrés Celsius au-dessus de la température de 1900.



1) a) Calculer $f(10)$, en arrondissant le résultat au centième.

b) En déduire qu'en 2150, avec ce modèle, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté.

2) a) En utilisant la partie A, déterminer l'année correspondant à l'abscisse du point I d'inflexion de la courbe C_f . Arrondir le résultat à l'unité.

b) Calculer, pour cette année-là, le nombre de degrés Celsius supplémentaires par rapport à 1900.

3) On appelle vitesse du réchauffement climatique la vitesse d'augmentation du nombre de degrés Celsius. On admet que, à partir de 1900, la vitesse du réchauffement climatique est modélisée par la fonction f'.

a) Est-il vrai de dire qu'après 2033 la température terrestre diminuera ? Justifier la réponse.

b) Est-il vrai de dire qu'après 2033 la vitesse du réchauffement climatique diminuera ? Justifier la réponse.

4) Pour sauvegarder les îles menacées par la montée des eaux, la température terrestre ne doit pas dépasser de plus de 1,5 °C la température de l'année 1900.
Déterminer l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra ce seuil, selon ce modèle.

EXERCICE 4

[Liban 2017]

Partie A:

1. Déterminons, pour tout réel x de [0; 10], f ':

Ici: • $f(x) = \dfrac{1}{0,5 + 100\, e^{-x}}$ $\left(\dfrac{u}{v}\right)$

• $Df = [\, 0;\ 10\,]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{f_2 + f_3}$, avec: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 0,5$

et: $f_3(x) = 100\, e^{-x}$.

f_1 et f_2 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle [0; 10].

f_3 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle [0; 10].

Par conséquent, $h = f_2 + f_3$ est dérivable sur [0; 10] comme somme de 2 fonctions dérivables sur [0; 10].

Enfin, f est dérivable sur [0; 10] comme quotient $\left(\dfrac{f_1}{h}\right)$ de 2 fonctions dérivables sur [0; 10], avec pour tout $x \in [\, 0;\ 10\,]$, $h(x) \neq 0$.

Ainsi, nous pouvons calculer f ' pour tout $x \in [\, 0;\ 10\,]$.

Pour tout $x \in [\, 0;\ 10\,]$:

$$f'(x) = \frac{0 \times (0,5 + 100\, e^{-x}) - 1 \times (-100\, e^{-x})}{[\,0,5 + 100\, e^{-x}]^2} \quad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{[v]^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{100\, e^{-x}}{[\,0,5 + 100\, e^{-x}]^2} > 0.$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $f'(x) = \dfrac{100\, e^{-x}}{[\,0,5 + 100\, e^{-x}]^2} > 0.$

2. a. Montrons l'équivalence demandée:

Pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $100\, e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 \iff e^{-x} \geqslant \dfrac{0,5}{100}$

$$\iff -x \geqslant \ln\left(\frac{0,5}{100}\right)$$

$$\iff x \leqslant -\ln\left(\frac{0,5}{100}\right)$$

$$\iff x \leqslant -\ln(0,005).$$

Au total, pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$, nous avons bien:

$$100\, e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 \iff x \leqslant -\ln(0,005).$$

2. b. Déduisons-en le tableau de signes de f'' sur $[\,0\,;\,10\,]$:

Ici:
- $f''(x) = \dfrac{100\, e^{-x} \times (100\, e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100\, e^{-x})^3}$
- $Df = [\,0\,;\,10\,]$.

Or pour tout $x \in [\,0\,;\,10\,]$: $100\, e^{-x} > 0$ et $(0,5 + 100\, e^{-x})^3 > 0.$

Le signe de f'' dépend donc du signe de: $100\, e^{-x} - 0,5.$

Or: $100\, e^{-x} - 0,5 \geqslant 0 \iff x \leqslant -\ln(0,005) \iff x \leqslant \ln(200).$

D'où le tableau de signes de f'' sur [0 ; 10] suivant:

x	0		ln (200)		10
f''		+	0	-	

3. Montrons que Cf admet un point d'inflexion noté I:

> Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Or c'est le cas quand: $x = \ln(200)$.

Au total, l'abscisse du point d'inflexion est: $x = \ln(200)$.

D'où: $I(\ln(200) ; f(\ln 200))$.

4. Déterminons l'intervalle sur lequel f est concave:

Soit [e ; f], l'intervalle recherché.

f est concave sur [e ; f] ssi: pour tout $x \in$ [e ; f], $f''(x) \leqslant 0$.

Or le signe de f'' dépend du signe de: $100\, e^{-x} - 0,5$.

Et: $100\, e^{-x} - 0,5 \leqslant 0$ ssi $x \in [\ln(200) ; 10]$.

Au total: f est concave sur [e ; f] = $[\ln(200) ; 10]$.

Partie B:

1. a. Calculons $f(10)$ en arrondissant au centième:

$$f(10) = \frac{1}{0,5 + 100\, e^{-10}} \Rightarrow f(10) \approx 1,98\ °C.$$

Au total: $f(10) \approx 1,98\ °C$.

1. b. Déduisons-en qu'en 2 150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté:

Nous avons: $f(10) \approx 1,98\ °C < 2\ °C$.

Or: $10 = 10 \times 25$ ans, cad: 250 ans.

Et: 250 ans + 1900 = 2 150.

Ainsi: en 2 150, l'objectif de l'accord de Paris sera respecté car en 2 150 la température aura augmenté de 1, 98 °C, ne dépassant pas de plus de 2 °C celle de 1900.

2. a. Déterminons l'année correspondante au point d'inflexion I:

Cela revient à calculer: $x_I = \ln(200)$.

$\ln(200) \approx 5,30 \Rightarrow x_I \approx 5,30$.

Or: $5,30 \times 25$ ans $\approx 132,50$ ans.

Et: $132,50$ ans + 1900 $\approx$ 2032.

Ainsi, l'année correspondante au point I est: 2032.

2. b. Calculons le nombre de degrés Celsius supplémentaire en 2032 par rapport à 1900:

Cela revient à calculer: $f(x_I)$, cad: $f(\ln(200))$.

$$f(\ln(200)) = \frac{1}{0,5 + 100 \times \frac{1}{200}} \Rightarrow f(\ln(200)) = 1\ °C.$$

Ainsi: en 2032, il y aura 1 °C supplémentaire par rapport à 1900.

3. a. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la température climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion I.

Or, nous savons que sur [0 ; 10] donc sur [x_I ; 10], la fonction f est strictement croissante car sur cet intervalle $f' > 0$ **(d'après 1.)**

Donc: il est **faux** de dire qu'après 2033 (x_I), la température climatique diminuera.

3. b. Est-il vrai de dire qu'après 2033, la vitesse du réchauffement climatique diminuera ?

Notons que 2033 se situe juste après le point d'inflexion I.

Or, sur [x_I ; 10], la fonction f est concave **(d'après 4.)**

Donc: il est **vrai** de dire qu'après 2033 (x_I), la vitesse du réchauffement climatique diminuera.

4. Déterminons l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de + 1,5 °C:

Il s'agit ici de déterminer la valeur de " x " telle que: $f(x) = 1,5$.

$$f(x) = 1,5 \iff \frac{1}{0,5 + 100\, e^{-x}} = 1,5$$

$$\iff \frac{3}{4} + 150\, e^{-x} = 1$$

$$\iff 3 + 600\, e^{-x} = 4$$

$$\iff 600\, e^{-x} = 1$$

$$\iff e^{x} = 600$$

$$\implies x = \ln(600) \text{ ou } x \approx 6,40.$$

Or: $6,40 \times 25$ ans $=$ 160 ans.

Et: 160 ans $+ 1900 = 2060$.

Ainsi, l'année au cours de laquelle la température terrestre atteindra le seuil de $+ 1,5\ °C$ est: 2060.