Corrigé

Exercice 3

freemaths.fr

LES MATHÉMATIQUES
AU BACCALAURÉAT ES

PROBABILITÉS, BAC ES

(probas discrètes et probas à densité)

- Arbre de probabilités
- Arbre pondéré
- Probabilités conditionnelles
- Loi de Bernoulli
- Loi binomiale
- Espérance mathématique
- Loi uniforme
- Loi normale centrée réduite
- Loi normale
- Intervalle de confiance
- Intervalle de fluctuation asymptotique
- Longueur d'un intervalle

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2019]

Partie A:

1. Calculons la probabilité qu'il y ait pénurie d'eau:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- D suit une loi normale d'espérance $\mu = 15,5\ m^3.s^{-1}$ et d'écart type $\sigma = 6\ m^3.s^{-1}$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Ici, nous devons calculer: $P(D \leqslant 8)$, car il y a pénurie d'eau lorsque le débit de la rivière est inférieure à $8\ m^3.s^{-1}$.

$$P(D \leqslant 8) = P\left(\frac{D - \mu}{\sigma} \leqslant \frac{8 - 15,5}{6}\right)$$

$$= P\left(T \leqslant -\frac{7,5}{6}\right)$$

$$= 1 - P(T \leqslant 1,25).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$P(D \leqslant 8) \approx 1 - 0,8943$ cad: $P(D \leqslant 8) \approx 0,11$, arrondi au centième.

Au total: il y a environ 11% de chance pour qu'il y ait pénurie d'eau.

2. **Calculons la probabilité qu'il n'y ait pas de vigilance particulière:**

Ici nous devons calculer: $P(8 \leqslant D \leqslant 26)$, **car il n'y a pas de vigilance particulière quand le débit de la rivière est compris entre 8 et 26 $m^3.s^{-1}$.**

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(8 \leqslant D \leqslant 26) \approx 0,85$$, **en arrondissant au centième.**

Au total: il y a environ 85% de chance pour qu'il n'y ait pas de vigilance particulière.

3. **Justifions que la probabilité que le débit observé soit compris entre 3,5 et 27,5 $m^3.s^{-1}$ est d'environ 0,95:**

Ici, il s'agit de calculer: $P(3,5 \leqslant D \leqslant 27,5)$, sans la calculatrice.

Nous remarquons que: $3,5 = \mu - 2\sigma$ et $27,5 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours: $P(\mu - 2\sigma \leqslant D \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(3,5 \leqslant D \leqslant 27,5) \approx 0,95$, **en arrondissant au centième.**

Au total: il y a bien 95% de chance pour que le débit observé soit compris entre 3,5 et 27,5 $m^3.s^{-1}$.

Partie B:

1. **Déterminons la loi de probabilité qui modélise cette situation:**

Soit l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard 10 relevés sur l'ensemble des relevés de la station.

On estime que cet ensemble est suffisamment grand pour que ce choix de 10 relevés soit assimilable à 10 tirages avec remise.

Soient les événements $S =$ " le relevé est effectué par l'équipe de Sébastien ", et $\overline{S} =$ " le relevé est effectué par l'autre l'équipe ".

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de relevés effectués par l'équipe de Sébastien parmi ces 10 relevés.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: S et $\overline{S}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de S suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 10$ et $p = \frac{1}{4}$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\left(10 ; \frac{1}{4}\right)$.

En fait, on répète 10 fois un schéma de Bernoulli.

2. Calculons la probabilité que 4 relevés exactement soient effectués par l'équipe de Sébastien:

Il s'agit donc de calculer ici: $P(X = 4)$.

$$P(X = 4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(1 - \frac{1}{4}\right)^6$$

cad: $P(X = 4) \approx 15\%$, à l'aide d'une machine à calculer et en arrondissant au centième.

Au total: il y a 15% de chance pour qu'exactement 4 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien.

3. Calculons la probabilité qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien:

Il s'agit de calculer ici: $P(X \geqslant 2)$.

$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2)$

$= 1 - P(X \leqslant 1)$.

Ainsi, à l'aide d'une machine à calculer, nous obtenons:

$$P(X \geqslant 2) \approx 76\%,$$ en arrondissant au centième.

Au total: il y a 76% de chance pour qu'au moins 2 relevés soient effectués par l'équipe de Sébastien.

Partie C:

Déterminons le nombre minimal de relevés à effectuer pour obtenir un intervalle au niveau de confiance de 95% dont l'amplitude est inférieure à 0, 1:

D'après le cours, nous savons qu'un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95%, nous est donné par la formule suivante:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \; ; \; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right],$$

avec ici:

- $n = ? \geqslant 30$, n étant le nombre de relevés effectués,
- f = la fréquence observée sur l'échantillon de relevés,
- $n \cdot f \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - f) \geqslant 5$.

Dans ces conditions, l'amplitude ou longueur L de l'intervalle est: $L = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Or, d'après l'énoncé, celle-ci est inférieure à 0, 1: $L \leqslant 0,1$.

D'où nous avons: $\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,1$ et donc $n \geqslant 400$ relevés.

Au total: le nombre minimal de relevés à effectuer doit être égal à 400.