Corrigé

Exercice 2

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5 (ES), 4(L)**

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
L : ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte **6 pages numérotées de 1 / 6 à 6 / 6**

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un particulier possède une piscine et décide de s'équiper d'un système automatique de remplissage pour tenir compte de l'évaporation pendant la période estivale. Sur un site spécialisé, il apprend que les conditions climatiques dans sa région pendant cette période sont telles qu'il peut prévoir une évaporation quotidienne de 4 % de la quantité d'eau. Il décide alors de régler son système de remplissage automatique à un apport de $2\,\text{m}^3$ d'eau par jour.

Le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient $75\,\text{m}^3$.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le volume d'eau dans la piscine, exprimé en mètre cube (m^3), n jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage. Ainsi, $u_0 = 75$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Justifier que la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
Est-elle géométrique ?

3. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}96 \times u_n + 2$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 50$.

- **a.** Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme v_0.
- **b.** Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
- **c.** En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 25 \times 0{,}96^n + 50$.
- **d.** Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Si le volume d'eau dans la piscine est inférieur à $65\,\text{m}^3$, le niveau de l'eau est insuffisant pour alimenter les pompes de filtration ce qui risque de les endommager. Pour connaître le nombre de jours pendant lesquels le niveau d'eau reste suffisant sans risquer de panne en conservant ce réglage, on construit l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel	L1
	u est un nombre réel	L2
Traitement :	n prend la valeur 0	L3
	u prend la valeur 75	L4
	Tant que u	L5
	u prend la valeur	L6
	n prend la valeur n+1	L7
	Fin Tant que	L8
Sortie :	Afficher n	L9

- **a.** Recopier et compléter les lignes L5 et L6 de cet algorithme.
- **b.** Quel est le résultat affiché en sortie de cet algorithme ?
- **c.** Pendant combien de jours le niveau de l'eau est-il suffisant si on conserve ce réglage ?

EXERCICE 2

[Antilles-Guyane 2017]

1. Calculons U_1 et U_2:

• Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 4\%)\, U_0 + 2 \iff U_1 = 0,96 \times 75 + 2$

$\Rightarrow U_1 = 74\ m^3.$

Ainsi, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), 1 jour après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage est de: 74.

• Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = (1 - 4\%)\, U_1 + 2 \iff U_2 = 0,96 \times 74 + 2$

$\Rightarrow U_2 = 73,04\ m^3.$

Ainsi, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), 2 jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage est de: 73, 04.

2. a. Justifions que la suite (U_n) n'est pas arithmétique:

D'après le cours, nous savons que (U_n) est une suite arithmétique ssi:

$$U_1 - U_0 = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots$$

Or ici: $U_1 - U_0 = -1$ et $U_2 - U_1 = -0,96.$

Donc: $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ car $-1 \neq -0,96.$

Ainsi: (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

2. b. La suite (U_n) est-elle géométrique ?

D'après le cours, nous savons que (U_n) est une suite géométrique ssi:

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots$$

Or ici: $\frac{U_1}{U_0} = 0,9866$ et $\frac{U_2}{U_1} = 0,9870.$

Donc: $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ car $0,9866 \neq 0,9870.$

Ainsi: (U_n) n'est pas une suite géométrique.

3. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,96 \times U_n + 2$:

• D'après l'énoncé, le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient 75 m^3.

D'où: $U_0 = 75\ m^3$.

• De plus, chaque jour, il y a une évaporation de 4% et la piscine se remplie automatiquement avec un apport de 2 m^3 d'eau.

Soient:
- U_{n+1}, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), $(n+1)$ jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage,
- U_n, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), (n) jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.

Pour tout entier n, le volume d'eau U_{n+1} est égal au volume d'eau U_n diminué de 4% et augmenté de 2 m^3.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 4\%\ U_n + 2 \iff U_{n+1} = 0,96\ U_n + 2.$

4. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $0,96$ et déterminons V_0:

$V_n = U_n - 50 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 50$

$\iff V_{n+1} = (0,96\,U_n + 2) - 50 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 50 \Rightarrow V_0 = 25$ et $U_n = V_n + 50.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,96\,[V_n + 50] + 2) - 50$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,96\,V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $V_0 = 25.$

4. b. Pour tout entier naturel n, exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,96\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,96)^n$, avec: $V_0 = 25.$

4. c. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n, $U_n = 25 \times 0,96^n + 50$:

Nous savons que:
- $V_n = 25 \times (0,96)^n$
- $U_n = V_n + 50.$

D'où: $U_n = 25 \times 0,96^n + 50.$

4. d. Déterminons la limite de la suite (U_n) et interprétons le résultat obtenu:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 25 \times (0,96)^n + 50$$

$$= 50 \quad \text{car: } \lim_{n\to+\infty} (0,96)^n = 0, \text{ car: } 0,96 \in \,]\,0, 1\,[.$$

La suite (U_n) est donc convergente et converge vers 50 m^3.

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), la piscine ne contiendra plus que 50 m^3 d'eau.

5. a. Recopions et complétons les lignes L_5 et L_6 de cet algorithme:

Les lignes L_5 et L_6 complétées sont les suivantes:

• L_5:	Tant que $U \geq 65$
• L_6:	| U prend la valeur $0,96 \times U + 2$

5. b. Déterminons le résultat affiché à la sortie:

Nous avons le tableau suivant:

Valeur de n	0	1	2	...	12	13
Valeur de U	75	74	73, 04		65, 32	64, 70

Nous nous arrêtons à l'étape $n = 13$ car c'est à partir de cette étape que le volume d'eau dans la piscine sera inférieur à 65 m^3.

En effet: $64,70\ m^3 < 65\ m^3$.

Ainsi, la valeur affichée en sortie de cet algorithme est: $n = 13$.

5. c. Déterminons combien de jours le niveau de l'eau est suffisant si on conserve ce réglage:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $U_n < 65$.

$U_n < 65 \iff 25 \times (0,96)^n + 50 < 65$

$\iff 25 \times (0,96)^n < 15$

$\Longleftrightarrow \quad (0,96)^n < 0,6$

$\Longleftrightarrow \quad n \ln(0,96) < \ln(0,6)$

$\Longleftrightarrow \quad n > \dfrac{\ln(0,6)}{\ln(0,96)}$, car: $0,96 \in]\,0, 1\,[$, et donc: $\ln(0,96) < 0$

$\Longrightarrow \quad n > 12,513$

$\Longrightarrow \quad n \geqslant 13$ car n est un entier naturel.

Ainsi, en conservant ce réglage, le niveau de l'eau de la piscine est suffisant pendant 13 jours.