Corrigé

Exercice 4

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2017

ÉPREUVE DU MERCREDI 21 JUIN 2017

MATHÉMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire **Coefficient : 7**

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1 à 8.

La page 8 est une annexe à rendre avec la copie.

Exercice 4 (5 points) : pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine.

Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n, le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$:
  85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n, on observe qu'en semaine $n+1$:
  65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n+1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

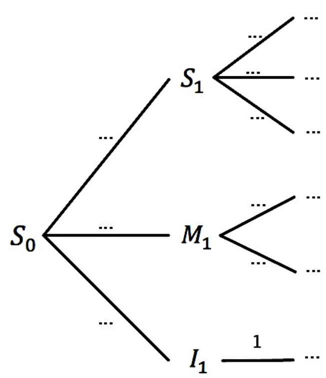
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1,\ P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2. Montrer que $P(I_2) = 0{,}2025$.

3. Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

Partie B

On étudie dans cette partie l'évolution à long terme de l'épidémie.
Pour tout entier naturel n, on note $u_n = P(S_n)$, $v_n = P(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des événements S_n, M_n et I_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = 0{,}65 v_n + 0{,}05 u_n.$$

2. À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n), (v_n) et (w_n) :

	A	**B**	**C**	**D**
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...	...	...	...	...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions **a** et **b** *suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.*

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet, par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N, appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par le modèle.

3. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}85\, u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$v_n = \frac{1}{4}\left(0{,}85^n - 0{,}65^n\right).$$

4. Calculer les limites de chacune des trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2017]

Partie A:

1. Reproduisons et complétons l'arbre de probabilités:

D'après l'énoncé, nous avons:

- S_n = " l'individu est de type S en semaine n ".
- M_n = " l'individu est malade en semaine n ".
- I_n = " l'individu est immunisé en semaine n ".

- $P(S_0) = 1$
- $P(M_0) = 0$
- $P(I_0) = 0$

$(1 + 0 + 0 = 1)$.

- $P_{S_0}(S_1) = 85\%$
- $P_{S_0}(M_1) = 1 - 85\% - 10\% = 5\%$
- $P_{S_0}(I_1) = 10\%$

$(85\% + 5\% + 10\% = 1)$.

- $P_{S_1}(S_2) = 85\%$
- $P_{S_1}(M_2) = 5\%$
- $P_{S_1}(I_2) = 10\%$

$(85\% + 5\% + 10\% = 1)$.

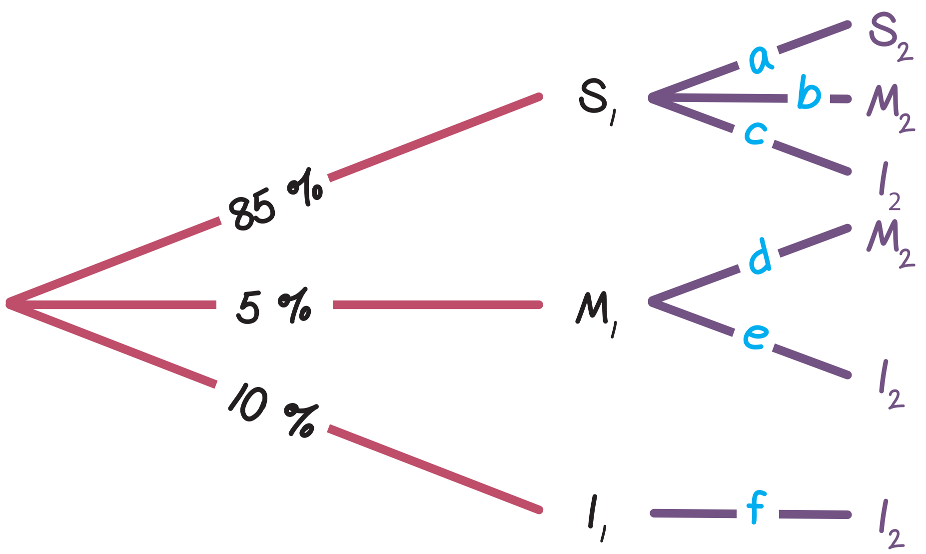
$\cdot P_{M_1}(M_2) = 65\%$

$\cdot P_{M_1}(I_2) = 35\%$

$(65\% + 35\% = 1).$

$\cdot P_{I_1}(I_2) = 1.$

D'où l'arbre de probabilités suivant:



, avec:

- $a = 85\ \%$
- $b = 5\ \%$
- $c = 10\ \%$
- $d = 65\ \%$
- $e = 35\ \%$
- $f = 1$

2. Montrons que $P(I_2) = 0,2025$:

Nous devons ainsi calculer: $P(I_2)$.

Or, l'événement $I_2 = (I_2 \cap S_1) \cup (I_2 \cap M_1) \cup (I_2 \cap I_1)$.

D'où: $P(I_2) = P(I_2 \cap S_1) + P(I_2 \cap M_1) + P(I_2 \cap I_1)$

$= P_{S_1}(I_2) \times P(S_1) + P_{M_1}(I_2) \times P(M_1) + P_{I_1}(I_2) \times P(I_1).$

Ainsi: $P(I_2) = 0,2025$.

Au total: $P(I_2) = 20,25\%$.

3. **Déterminons la probabilité qu'un individu ait été malade en semaine 1, sachant qu'il est immunisé en semaine 2:**

Cela revient à calculer: $P_{I_2}(M_1)$.

$$P_{I_2}(M_1) = \frac{P(I_2 \cap M_1)}{P(I_2)}$$

$$= \frac{P_{M_1}(I_2) \times P(M_1)}{P(I_2)}.$$

Ainsi: $P_{I_2}(M_1) \approx 0,086$.

Au total, la probabilité qu'un individu ait été malade en semaine 1, sachant qu'il est immunisé en semaine 2 est d'environ: $8,6\%$.

EXERCICE 4

[France Métropolitaine 2017]

Partie B:

1. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_n + V_n + W_n = 1$:

D'après le cours, nous savons que la somme des probabilités est égal à 1.

Donc ici: $P(S_n) + P(M_n) + P(I_n) = 1$

cad: $U_n + V_n + W_n = 1.$

Au total, pour tout entier naturel n: $U_n + V_n + W_n = 1.$

2. a. Déterminons la formule, saisie dans la cellule C_3, qui permet de calculer les termes de la suite (V_n):

D'après l'énoncé:
- $V_0 = 0,$
- $V_{n+1} = 0,65 \times V_n + 0,05 \times U_n.$

Ainsi, la formule demandée est: << $= 0,65 * C_2 + 0,05 * B_2$ >>.

En effet: $C_3 = 0,65 \times 0 + 0,05 \times 1.$

2. b. Déterminons la valeur du pic épidémique prévue par le modèle:

L'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande est atteinte quand: $n = 4.$

Le pic d'épidémique a donc pour valeur: $V_4 = 0,0859.$

3. a. • Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,85\ U_n$:

D'après l'énoncé: " Parmi les individus de type S en semaine n, on observe qu'en semaine n+1, 85% restent de type S . . . ".

Dans ces conditions: $P(S_{n+1}) = 0,85 \times P(S_n)$.

Ce qui revient à écrire: $U_{n+1} = 0,85 \times U_n$, pour tout entier naturel n.

• Déduisons-en U_n en fonction de n:

Comme $U_{n+1} = 0,85 \times U_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$U_n = U_0 \times (0,85)^n, \text{ avec: } U_0 = 1.$$

Au total, pour tout entier naturel n: $U_n = (0,85)^n$.

3. b. Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$ ".

Initialisation: • $V_0 = \frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0)$?

oui car: $V_0 = 0$ et $\frac{1}{4}(0,85^0 - 0,65^0) = 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $V_1 = \frac{1}{4}(0,85^1 - 0,65^1)$?

oui car: $V_1 = 0,05$ et $\frac{1}{4}(0,85^1 - 0,65^1) = 0,05$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$

et montrons qu'alors: $V_{n+1} = \frac{1}{4}(0,85^{(n+1)} - 0,65^{(n+1)})$.

Supposons: $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$(1) \Rightarrow 0,65\, V_n = 0,65 \times \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$$

$$\Rightarrow 0,65\, V_n = \frac{1}{4}(0,65 \times (0,85)^n - (0,65)^{n+1})$$

$$\Rightarrow 0,65\, V_n + 0,05\, U_n = \frac{1}{4}(0,65 \times (0,85)^n - (0,65)^{n+1}) + 0,05\, U_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4}(0,65 \times (0,85)^n - (0,65)^{n+1}) + 0,05 \times (0,85)^n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{4}(0,85^{n+1} - 0,65^{n+1}) \text{ car } 0,05 = \frac{1}{4}(0,2).$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, nous avons: $V_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$.

4. a. Calculons les limites des suites (U_n), (V_n) et (W_n):

- $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (0,85)^n$

  $= 0$ car: $0,85 \in]0,1[$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n)$

  $= 0$ car: $0,85 \in]0,1[$ et $0,65 \in]0,1[$.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - U_n - V_n$

$$= 1 \quad \text{car:} \quad \lim_{n \to +\infty} U_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} V_n = 0.$$

Ainsi, les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et convergent vers " 0 ".

Quant à la suite (W_n) elle est convergente et converge vers " 1 ".

4. b. Que peut-on déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Comme $\lim_{n \to +\infty} W_n = 1$, nous pouvons affirmer qu'à long terme tous les individus seront immunisés contre l'épidémie.