Corrigé

Exercice 2

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION 2016

MATHEMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU LUNDI 20 JUIN 2016

Enseignement Spécialité ***Coefficient : 9***

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Le candidat doit traiter tous les exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies

Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on donne les points :

$A(1, 2, 3)$, $B(3, 0, 1)$, $C(-1 , 0, 1)$, $D(2 , 1, -1)$, $E(-1 , -2 , 3)$ et $F(-2 , -3 , 4)$.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Les trois points A, B, et C sont alignés.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}(0, 1, -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 3 : La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC].

Affirmation 4 : Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2016]

1. **Affirmation 1**: " Les trois points A, B et C sont alignés ".

C'est faux.

Justifions le.

Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$.

D'après le cours: les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ssi il existe un réel α tel que: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} 2 = -2\alpha \\ -2 = -2\alpha \\ -2 = -2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}.$$

Or: $-1 \neq 1$, donc le système est impossible.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Au total: Les 3 points A, B et C ne sont pas alignés.

2. **Affirmation 2**: " $\vec{n}$ $(0; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) ".

C'est vrai.

Justifions le.

D'après le cours: **un vecteur $\vec{n}$ $(a\,; b\,; c)$ est normal à un plan ssi ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.**

Ici: • il s'agit du plan (ABC);

• 2 vecteurs non colinéaires de ce plan sont respectivement:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix};$$

• $\vec{n}$ $(0\,; 1\,; -1)$.

De plus: • $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux car $(0 \times 2) + (1 \times -2) + (-1 \times -2) = 0$;

• $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux car $(0 \times -2) + (1 \times -2) + (-1 \times -2) = 0$.

Par conséquent: $\vec{n}$ est bien orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan. Donc $\vec{n}$ $(0\,; 1\,; -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

3. Affirmation 3: **" La droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants et leur point d'intersection est le milieu du segment [BC] ".**

C'est vrai.

Justifions le.

Etape 1: Représentation paramétrique de la droite (EF).

Soient: • le vecteur $\overrightarrow{EF}$ avec: $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (EF) avec: $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

D'où, la représentation paramétrique de la droite passant par E et de vecteur directeur $\vec{u}$ s'écrit:

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - t \quad , t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Etape 2: Détermination d'une équation cartésienne du plan (ABC).

Ici: • $\vec{n}$ $(a = 0 ; b = 1 ; c = -1)$ est un vecteur normal au plan (ABC);

• $A\ (1 ; 2 ; 3)$ est un point de l'espace.

D'où, une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est: $a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0$

<=> $(y - 2) - (z - 3) = 0$

=> $y - z + 1 = 0.$

Etape 3: Détermination du point d'intersection $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ entre la droite (EF) et le plan (ABC).

Le point M vérifie: • $\begin{cases} x_M = -1 - t \\ y_M = -2 - t \\ z_M = 3 + t \end{cases}$

et: • $y_M - z_M + 1 = 0 \quad (1).$

Dans ces conditions: (1) <=> $(-2 - t) - (3 + t) + 1 = 0$

=> $t = -2.$

Les coordonnées du point M, avec t = - 2, sont donc: $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or le milieu du segment [BC] est:

$$I\begin{pmatrix} \frac{(3-1)}{2} \\ \frac{(0+0)}{2} \\ \frac{(1+1)}{2} \end{pmatrix} \text{ cad } I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Au total: Comme M = I, la droite (EF) et le plan (ABC) sont sécants en :

$$I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Affirmation 4: " Les droites (AB) et (CD) sont sécantes ".

C'est faux.

Justifions le.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (AB) passe par le point A et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix};$$

• la droite (CD) passe par le point C et a pour vecteur directeur

$$\vec{u}'\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, la représentation paramétrique de la droite (AB) est:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

Et, la représentation paramétrique de la droite (CD) est:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t' \\ y = t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases} \quad , t' \in \mathbb{R}.$$

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes ssi leur point d'intersection vérifie le système:

$$\begin{cases} 1 + 2t = -1 + 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 3 - 2t = 1 - 2t' \end{cases} \iff \begin{cases} 2t - 3t' = -2 \\ 2t + t' = 2 \\ -2t + 2t' = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2t - 3t' = -2 & (1) \\ 2t + t' = 2 & (2) \\ t' = -1 + t \end{cases}$$

En remplaçant t' par " $-1+t$ " dans les équations (1) et (2), nous avons:

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2t - 3(-1+t) = -2 \\ 2t + (-1+t) = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} t = 5 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Or: $5 \neq 1$, donc le système est impossible.

Au total: Les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.