

Corrigé

Exercice 1



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures - Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de la page 1/6 à la page 6/6.

L'usage des calculatrices est autorisé selon les termes de la circulaire
n° 99-186 du 16 novembre 1999.

*_*_*_*

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

*Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront
pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL - Série S	SESSION 2015	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	SUJET	
	Coefficient : 7	Page 1/6
15MASC0G11	Durée : 4 heures	

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

4 points

Commun à tous les candidats

Tous les résultats demandés dans cet exercice seront arrondis au millième.
Les parties A, B et C sont indépendantes.

Un fournisseur produit deux sortes de cadenas. Les uns sont *premier prix*, et les autres sont *haut de gamme*. Un magasin de bricolage dispose d'un stock de cadenas provenant de ce fournisseur ; ce stock comprend un grand nombre de cadenas de chaque type.

Partie A

1. Le fournisseur affirme que, parmi les cadenas *haut de gamme*, il n'y a pas plus de 3 % de cadenas défectueux dans sa production. Le responsable du magasin de bricolage désire vérifier la validité de cette affirmation dans son stock ; à cet effet, il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *haut de gamme*, et en trouve 19 qui sont défectueux.

Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3 % de cadenas défectueux ?

On pourra pour cela utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

2. Le responsable du magasin souhaite estimer la proportion de cadenas défectueux dans son stock de cadenas *premier prix*. Pour cela il prélève un échantillon aléatoire de 500 cadenas *premier prix*, parmi lesquels 39 se révèlent défectueux.

Donner un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95 %.

Partie B

D'après une étude statistique faite sur plusieurs mois, on admet que le nombre X de cadenas *premier prix* vendus par mois dans le magasin de bricolage peut être modélisé par une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 750$ et d'écart-type $\sigma = 25$.

1. Calculer $P(725 \leq X \leq 775)$.
2. Le responsable du magasin veut connaître le nombre n de cadenas *premier prix* qu'il doit avoir en stock en début de mois, pour que la probabilité d'être en rupture de stock en cours de mois soit inférieure à 0,05. *On ne réalimente pas le stock en cours de mois.*

Déterminer la plus petite valeur de l'entier n remplissant cette condition.

Partie C

On admet maintenant que, dans le magasin :

- 80 % des cadenas proposés à la vente sont *premier prix*, les autres *haut de gamme*;
- 3 % des cadenas *haut de gamme* sont défectueux;
- 7 % des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas *premier prix* soit défectueux;
- H l'évènement : « le cadenas prélevé est *haut de gamme* »;
- D l'évènement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Exprimer en fonction de p la probabilité $P(D)$. En déduire la valeur du réel p .
Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la question A - 2. ?
3. Le cadenas prélevé est en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas *haut de gamme*.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2015]

Partie A: Intervalles

1. Ce contrôle remet-il en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux ?

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.

Ici, nous avons: • $n = 500$

• $p = 3\%$

• $f = \frac{19}{500} \Rightarrow f = 3,8\%$.

Dans ces conditions:

$n = 500 \geq 30$, $n \cdot p = 15 \geq 5$ et $n \cdot (1 - p) = 485 \geq 5$.

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon de 500.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [0,015; 0,045]$.

Or: $f \approx 3,8\% \in I$.

Ainsi, **non** le test réalisé ne remet pas en cause le fait que le stock ne comprenne pas plus de 3% de cadenas défectueux.

2. Donnons un intervalle de confiance de cette proportion au niveau de confiance 95%:

Ici, nous avons: • $n = 500$

$$\bullet f = \frac{39}{500} \Rightarrow f = 7,8\%.$$

Dans ces conditions:

$$n = 500 \geq 30, n \cdot f = 39 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - f) = 461 \geq 5.$$

Les conditions étant réunies, un intervalle de confiance à 95% de cette proportion s'écrit:

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [3,3\%; 12,3\%]$.

Partie B: Cadenas premier prix

1. Calculons $P(725 \leq X \leq 775)$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond au nombre de cadenas premier prix vendu par mois.
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 750$ et d'écart type $\sigma = 25$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(725 \leq X \leq 775)$.

Nous remarquons que: $725 = \mu - \sigma$ et $775 = \mu + \sigma$.

Or, d'après le cours, $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$.

D'où: $P(725 \leq X \leq 775) \approx 0,683$.

Au total, la probabilité demandée est de: 68,3%.

2. Déterminons la plus petite valeur de l'entier n:

Il s'agit de déterminer l'entier n tel que: $P(X > n) \leq 0,05$.

$$P(X > n) \leq 0,05 \Leftrightarrow P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{n - 750}{25}\right) \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow P\left(T > \frac{n - 750}{25}\right) \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{n - 750}{25}\right) \geq 0,95.$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\frac{n - 750}{25} \approx 1,645 \Rightarrow n \approx 791,25$$

$$\Rightarrow n \approx 792 \text{ cadenas.}$$

Au total, la valeur recherchée pour n est d'environ: 792 cadenas.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2015]

Partie C: Les cadenas

1. Représentons la situation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- H = " le cadenas est haut de gamme ".
- \bar{H} = " le cadenas est premier prix ".
- D = " le cadenas prélevé est défectueux ".

- $P(H) = 20\%$
- $P(\bar{H}) = 80\%$
($20\% + 80\% = 1$).

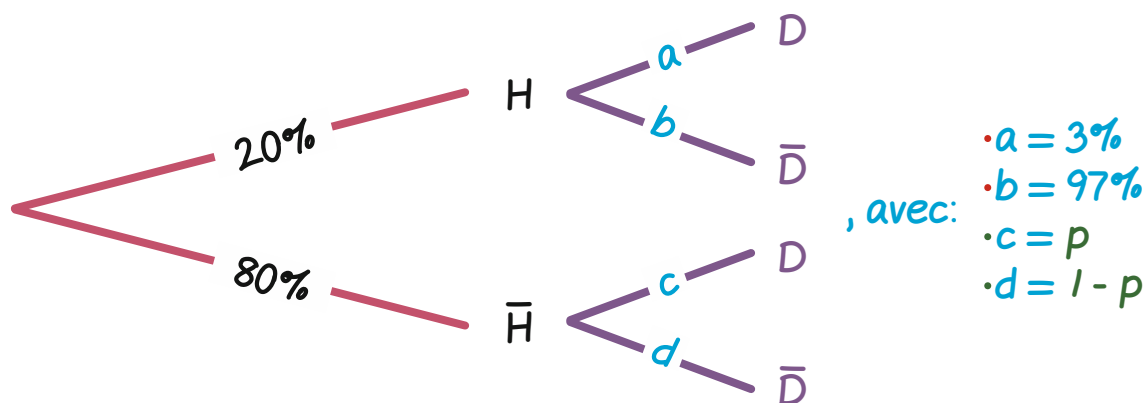
- $P(D) = 7\%$
- $P(\bar{D}) = 93\%$
($7\% + 93\% = 1$).

- $P_H(D) = 3\%$
- $P_H(\bar{D}) = 97\%$
($3\% + 97\% = 1$).

- $P_{\bar{H}}(D) = p$
- $P_{\bar{H}}(\bar{D}) = 1 - p$
($p + (1 - p) = 1$).

Nous pouvons représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

D'où l'arbre pondéré suivant:



2. a. Exprimons $P(D)$ en fonction de p :

L'événement $D = (D \cap H) \cup (D \cap \bar{H})$.

D'où: $P(D) = P(D \cap H) + P(D \cap \bar{H})$

$$= P_H(D) \times P(H) + P_{\bar{H}}(D) \times P(\bar{H}).$$

Ainsi: $P(D) = 3\% \times 20\% + p \times 80\%$

$$\Rightarrow P(D) = 0.8 \times p + 0.006.$$

2. b. Déduisons-en la valeur de p avec $P(D) = 7\%$:

$$P(D) = 7\% \Leftrightarrow 0.8 \times p + 0.006 = 0.7$$

$$\Rightarrow p = 8\%.$$

Au total, la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux est de: 8%.

2. c. Le résultat est-il cohérent ?

Oui.

3. Déterminons la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme:

Ici, il s'agit de calculer: $P_{\bar{D}}(H)$.

$$P_{\bar{D}}(H) = \frac{P(\bar{D} \cap H)}{P(\bar{D})} \Leftrightarrow P_{\bar{D}}(H) = \frac{P_H(\bar{D}) \times P(H)}{1 - P(D)}$$

$$\text{Ainsi: } P_{\bar{D}}(H) = \frac{0.97 \times 0.2}{0.93} \Rightarrow P_{\bar{D}}(H) \approx 20.9\%$$

Au total, la probabilité demandée est de: 20.9%.