

Corrigé

Exercice 3



freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 3 – 5 points

Un téléphone portable contient en mémoire 3 200 chansons archivées par catégories : rock, techno, rap, reggae... dont certaines sont interprétées en français.

Parmi toutes les chansons enregistrées, 960 sont classées dans la catégorie rock.

Une des fonctionnalités du téléphone permet d'écouter de la musique en mode « lecture aléatoire » : les chansons écoutées sont choisies au hasard et de façon équiprobable parmi l'ensemble du répertoire.

Au cours de son footing hebdomadaire, le propriétaire du téléphone écoute une chanson grâce à ce mode de lecture.

On note :

- R l'événement : « la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock » ;
- F l'événement : « la chanson écoutée est interprétée en français ».

Les PARTIES A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Calculer $P(R)$, la probabilité de l'événement R.
2. 35% des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français ; traduire cette donnée en utilisant les événements R et F.
3. Calculer la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français.
4. Parmi toutes les chansons enregistrées 38,5% sont interprétées en français. Montrer que $P(F \cap \bar{R}) = 0,28$.
5. En déduire $P_{\bar{R}}(F)$ et exprimer par une phrase ce que signifie ce résultat.

PARTIE B *Les résultats de cette partie seront arrondis au millième.*

Le propriétaire du téléphone écoute régulièrement de la musique à l'aide de son téléphone portable.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque écoute de musique, associe la durée (en minutes) correspondante ; on admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

Le propriétaire écoute de la musique.

1. Quelle est la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure ?

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

Partie A: Le téléphone portable

1. Calculons $P(R)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

- R = " la chanson écoutée est une chanson de la catégorie rock ".
- F = " la chanson écoutée est interprétée en Français ".
- Nombre total de chansons: 3200.
- Nombre de chansons dans la catégorie rock: 960.

Dans ces conditions:

$$P(R) = \frac{960}{3200} \Rightarrow P(R) = 30\%$$

Au total, il y a 30% de chance pour que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock.

2. Traduisons cette donnée en utilisant R et F :

35% des chansons de la catégorie rock sont interprétées en français.

En traduisant cette donnée, nous pouvons écrire en utilisant R et F :

$$P_R(F) = 0.35.$$

3. Calculons la probabilité que la chanson écoutée soit une chanson de la catégorie rock et qu'elle soit interprétée en français:

Cela revient à calculer: $P(R \cap F)$.

$$\text{Nous savons que: } P_R(F) = \frac{P(R \cap F)}{P(R)}$$

$$\Rightarrow P(R \cap F) = P_R(F) \times P(R).$$

$$\text{Ainsi: } P(R \cap F) = 0.35 \times 0.3 \Rightarrow P(R \cap F) = 0.105.$$

Au total, il y a 10.5% de chance pour que la chanson soit de la catégorie rock et soit interprétée en français.

4. Montrons que $P(F \cap \bar{R}) = 0.28$:

L'événement $F = (R \cap F) \cup (\bar{R} \cap F)$.

$$\text{D'où: } P(F) = P(R \cap F) + P(\bar{R} \cap F)$$

$$\Rightarrow P(F \cap \bar{R}) = P(F) - P(R \cap F).$$

$$\text{Ainsi: } P(F \cap \bar{R}) = 38.5\% - 10.5\% \Rightarrow P(F \cap \bar{R}) = 0.28.$$

Au total, il y a 28% de chance pour que la chanson soit interprétée en français et ne soit pas de la catégorie rock.

5. Déduisons et interprétons $P_{\bar{R}}(F)$:

$$P_{\bar{R}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} \Leftrightarrow P_{\bar{R}}(F) = \frac{P(F \cap \bar{R})}{1 - P(R)}$$

$$\text{Ainsi: } P_{\bar{R}}(F) = \frac{28\%}{1 - 30\%} \Rightarrow P_{\bar{R}}(F) = 0.4.$$

Au total, cela signifie que: 40% des chansons, qui n'appartiennent pas à la catégorie rock, sont interprétées en français.

EXERCICE 3

[France Métropolitaine 2016]

Partie B: La durée de l'écoute de musique

1. Déterminons la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui correspond à la durée de chaque écoute musique (en mn).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart type $\sigma = 10$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(15 \leq X \leq 45)$.

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(15 \leq X \leq 45) \approx 0,8666.$$

Au total, la probabilité que la durée de cette écoute soit comprise entre 15 et 45 minutes est de: 86,60%.

2. Déterminons la probabilité que cette écoute dure plus d'1 heure:

Il s'agit de calculer: $P(X \geq 60)$. (1 heure = 60 minutes)

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{60 - 30}{10}\right) \\ &= P(T \geq 3) \end{aligned}$$

$$= 1 - P(T \leq 3).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geq 60) = 0,1\%.$$

Au total, la probabilité que cette écoute dure plus d'une heure est de:

$$0,1\%.$$