Corrigé

Exercice 1

freemaths.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2015

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

MATHÉMATIQUES – Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

Mercredi 24 Juin 2015

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 – 6 points

Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée de 42% de femmes. 35% des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55% pour les hommes.

Une personne entre dans le magasin. On note :

- F l'événement : « La personne est une femme » ;
- R l'événement : « La personne repart sans rien acheter » ;

Pour tout événement A, on note $\bar{A}$ son événement contraire et $p(A)$ sa probabilité.

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.
Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

PARTIE A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.
3. Montrer que $p(R) = 0{,}534$.

PARTIE B

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone de type T_1 qu'il vient de s'offrir.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.
2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

PARTIE C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30% des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur…).
Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1 500.
2. Le service marketing interroge un échantillon de 1 500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires. Doit-on rejeter au seuil de 5% l'hypothèse formulée par le gérant ?

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie A: Femmes et achat

1. Construisons un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F = " la personne est une femme ".
- $\overline{F}$ = " la personne est un homme ".
- R = " la personne repart sans rien acheter ".
- $\overline{R}$ = " la personne effectue un achat ".

- $P(F) = 0.42$
- $P(\overline{F}) = 0.58$

$(0.42 + 0.58 = 1)$.

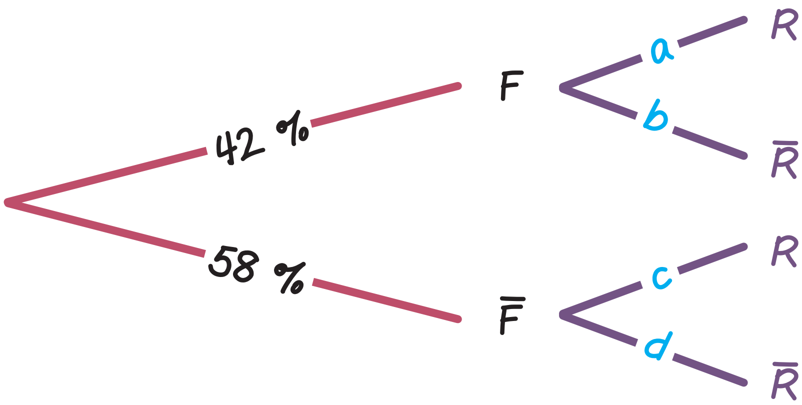
- $P_F(R) = 0.65$
- $P_F(\overline{R}) = 0.35$

$(0.65 + 0.35 = 1)$.

- $P_{\overline{F}}(R) = 0.45$
- $P_{\overline{F}}(\overline{R}) = 0.55$

$(0.45 + 0.55 = 1)$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 0.65$
- $b = 0.35$
- $c = 0.45$
- $d = 0.55$

2. Calculons la probabilité que la personne soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter:

Cela revient à calculer: $P(F \cap R)$.

$P(F \cap R) = P_F(R) \times P(F)$.

Ainsi: $P(F \cap R) = 0.65 \times 0.42 \Rightarrow P(F \cap R) \approx 0.273$.

Au total, il y a 27.3% de chance pour que la personne qui entre dans le magasin soit une femme et n'achète rien du tout.

3. Montrons que $P(R) = 0.534$:

L'événement $R = (R \cap F) \cup (R \cap \overline{F})$.

D'où: $P(R) = P(R \cap F) + P(R \cap \overline{F})$

$= P_F(R) \times P(F) + P_{\overline{F}}(R) \times P(\overline{F})$.

Ainsi: $P(R) = 0.65 \times 0.42 + 0.45 \times 0.58 \Rightarrow P(R) \approx 0.534$.

Au total, il y a 53.4% de chance pour que la personne reparte sans rien acheter.

EXERCICE 1

[France Métropolitaine 2015]

Partie B: Le téléphone de type T1

1. Justifions que $P(X \geqslant 36) \approx 0,885$:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui à chaque téléphone, de type T1 prélevé au hasard, associe sa durée de vie (en mois).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart type $\sigma = 10$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Il s'agit de calculer: $P(X \geqslant 36)$.

$$P(X \geqslant 36) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geqslant \frac{36 - 48}{10}\right)$$

$$= P(T \geqslant -1,2)$$

$$= 1 - P(T \leqslant -1,2)$$

$$= P(T \leqslant 1,2).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(X \geqslant 36) \approx 0,885.$$

Au total, la probabilité que le téléphone de type T1 fonctionne plus de 3 ans (36 mois) est de: 88,5%.

2. Déterminons la probabilité que le téléphone de type T1 fonctionne moins de 5 ans sachant qu'il a fonctionné plus de 3 ans:

Cela revient à calculer: $\dfrac{P\,(36 \leqslant X \leqslant 60)}{P\,(X \geqslant 36)}$. **(5 ans = 60 mois)**

Nous savons déjà que: $P\,(X \geqslant 36) \approx 0,885$.

De plus à l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P\,(36 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0,77.$$

Ainsi: $\dfrac{P\,(36 \leqslant X \leqslant 60)}{P\,(X \geqslant 36)} \approx 0,87$.

Au total, la probabilité demandée est de: 87%.

Partie C: Achat uniquement d'accessoires

1. Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique:

Ici, nous avons:
- $n = 1500$
- $p = 30\%$ (par hypothèse)
- $f = \dfrac{430}{1500} \Rightarrow f \approx 28,7\%$.

Dans ces conditions:

$n = 1500 \geqslant 30$, $n \cdot p = 450 \geqslant 5$ et $n \cdot (1 - p) = 1050 \geqslant 5$.

Les conditions sont donc réunies et le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30% des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires.

On choisit un échantillon aléatoire de 1500 personnes parmi les clients.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right].$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I = [\,27,6\%\,;\,32,3\%\,]$.

2. Doit-on rejeter au seuil de 5% l'hypothèse du gérant:

La fréquence de personnes " f " ayant uniquement acheté des accessoires, sur l'échantillon, est telle que:

$$f \approx 28,7\% \in I.$$

Ainsi, l'hypothèse formulée par le gérant est bonne au seuil de 5%.

Il ne faut donc pas la rejeter.