Sujet Spécialité

MATHÉMATIQUES
ANTILLES - GUYANE
BAC ES - 2018

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2018

MATHÉMATIQUES – Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SUJET

ÉPREUVE DU MARDI 19 JUIN 2018

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 7

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 5 pages, y compris celle-ci.

EXERCICE 1 (4 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;\,10]$ par $f(x) = (2x-3)\mathrm{e}^{-3x}$.
L'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-10\,;\,10]$:

- **a)** 0 solution
- **b)** 1 solution
- **c)** 2 solutions
- **d)** 3 solutions ou plus

2. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$; l'équation de sa tangente au point d'abscisse 1 est :

a) $y = 1$ **b)** $y = x - 1$ **c)** $y = 1 - x$ **d)** $y = x + 1$

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 25$ et $\sigma = 3$.
La meilleure valeur approchée du réel t tel que $\mathrm{P}(X > t) = 0,025$ est :

a) $t \approx 0,97$ **b)** $t \approx 19,12$ **c)** $t \approx 28$ **d)** $t \approx 30,88$

4. Anne prévoit d'appeler Benoît par téléphone à un moment choisi au hasard entre 8 h 30 et 10 h. Benoît sera dans un train à partir de 9 h pour un trajet de plusieurs heures.
Quelle est la probabilité qu'Anne appelle Benoît alors qu'il est dans le train ?

a) $\dfrac{60}{150}$ **b)** $\dfrac{2}{3}$ **c)** $\dfrac{6}{13}$ **d)** $\dfrac{1}{3}$

EXERCICE 2 (5 points) Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B sont indépendantes.

Franck joue en ligne sur internet.

Partie A

Après plusieurs semaines, des statistiques données par le logiciel lui permettent de dire que :
• quand il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,65 ;
• quand il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est égale à 0,42.

On note G l'état : "Franck gagne la partie" et P l'état : "Franck perd la partie".

Sur une période donnée, on note, pour tout entier naturel n non nul :

• g_n la probabilité que Franck gagne la n-ième partie ;
• p_n la probabilité que Franck perde la n-ième partie.

Dans cette période, Franck a gagné la première partie.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets notés G et P.

2. **a)** Écrire la matrice de transition M dans l'ordre G-P.

b) Calculer la probabilité que Franck gagne la troisième partie.

3. Déterminer l'état stable du système et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

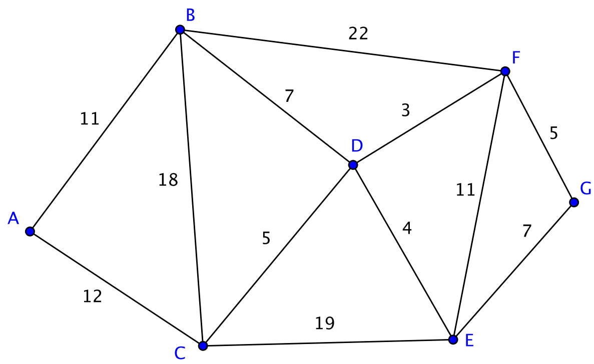
Partie B

Dans ce jeu vidéo, Franck circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.

On a représenté ci-contre le graphe modélisant ces catacombes.

Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs.

Les étiquettes du graphe correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1. **a)** Justifier qu'il est possible, au départ d'une salle quelconque, d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.

b) Donner un tel chemin.

2. Franck débute le jeu dans la salle A et doit atteindre l'adversaire final en salle G.
Existe-t-il un chemin permettant de se rendre de la salle A à la salle G en passant une et une seule fois par tous les couloirs ?

3. Une fois arrivé en salle G, Franck souhaite revenir en salle A en affrontant le moins de monstres possible afin de recommencer une nouvelle partie.
Déterminer ce trajet minimal et préciser le nombre de monstres affrontés.

EXERCICE 3 (5 points) Commun à tous les candidats

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 0,4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 1,028\, v_n \end{array}\right. .$$

1. **a.** Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

b. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n.

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel, et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
   U ← U + 0,4
   V ← V × 1,028
   n ← n + 1
Fin Tant que
```

En sortie de cet algorithme, n a pour valeur 46.
Interpréter ce résultat.

3. En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie "An essay on the principle of population" dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine.
Il écrit :

> *"Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique."*

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année.

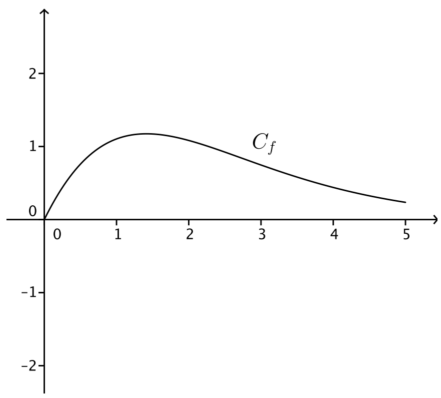
On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.

a. Quelle aurait été, en million d'habitants, la population de l'Angleterre en 1810 ? On arrondira le résultat au millième.

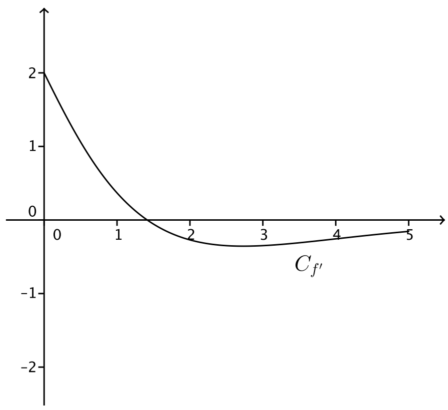
b. À partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait-elle dépassé 16 millions d'habitants ?

c. À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait-elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

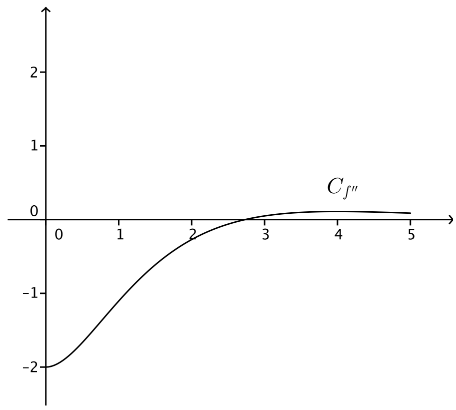
EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats



Courbe C_f



Courbe $C_{f'}$



Courbe $C_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe C_f représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$ ainsi que les courbes représentatives $C_{f'}$ et $C_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.

2. **a.** Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction f semble convexe.

   b. Expliquer pourquoi on peut conjecturer que la courbe C_f admet un point d'inflexion. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de ce point d'inflexion.

3. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 ?

   $y = x$ $\qquad y = 2x + 1 \qquad y = 2x \qquad y = \dfrac{3}{4}x$

4. On note $I = \displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ où f' est la fonction dérivée de f.
   Comment s'interprète graphiquement ce nombre I ?

Partie B

La fonction f représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0\,;5]$ par $f(x) = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^{-x}$.

1. **a.** Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \left(-x^2 + 2\right)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;5]$.

   b. Déterminer les variations de f sur $[0\,;5]$ et préciser l'abscisse de son maximum.

   c. Donner la valeur arrondie au millième du maximum de f.

2. Avec un outil de calcul on obtient, pour $\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$ et $f(1)$, la même valeur approchée 1,103 64.
   Ces deux valeurs sont-elles égales ?