ÉPREUVE MATHÉMATIQUES
SciencesPo - Paris, 2015

CORRIGÉ - freemaths.fr

Pour s'entraîner :

Problème :

- Analyse I, 2e édition - Alain Piller
- Analyse II - Alain Piller
- Suites, T. S - freemaths.fr
- Fonctions, Intégrales, T. S - freemaths.fr

Exercice :

Thème sur freemaths.fr (selon la question)

- Suites, T. S [Q. 1, Q. 2, Q. 4 et Q. 7]
- Fonctions, Intégrales, T. S [Q. 3, Q. 5 et Q. 8]
- Probabilités Discrètes, T. S [Q. 9 et Q. 10]
- Géométrie dans l'Espace, T. S [Q. 6]

EXERCICE: Vrai ou Faux ? (8 points)

1. C'est faux.

Pour le justifier, nous allons calculer V_3 sachant que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $V_{n+1} = n\,V_n$.

- $V_1 = 1$,
- $V_2 = 1 \times 1 \Rightarrow V_2 = 1$,
- $V_3 = 2 \times 1 \Rightarrow V_3 = 2$.

D'où: $V_3 = 2 \neq 6$.

Donc l'affirmation est fausse.

2. C'est faux.

- D'après l'énoncé:
  - $U_0 = 1$,
  - $U_{n+1} = U_n + 1, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$,
  - $V_n = e^{U_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

- D'après le cours, nous savons que: • $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ici: $V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n = e^{U_0} + e^{U_1} + e^{U_2} + \dots + e^{U_n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$

$= e^1 + e^{1+1} + e^{2+1} + e^{3+1} + \dots + e^{n+1}$

$= e^1 \times [\,1 + e^1 + e^2 + e^3 + \dots + e^n\,]$

$= e \times [\,1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n\,]$, avec: $q = e$

$$\Rightarrow \quad V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n = e \times \left[\frac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q} \right]$$

cad: $$V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n = e \times \left[\frac{1 - e^{(n+1)}}{1 - e} \right].$$

Dans ces conditions: $$\lim_{n \to +\infty} (V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n) = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{e - e^{(n+2)}}{1 - e} \right]$$

$$= +\infty.$$

En effet : • $\lim_{n \to +\infty} e^{(n+2)} = +\infty$,

• $1 - e < 0$.

Ainsi: $$\lim_{n \to +\infty} (V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n) = +\infty \neq \frac{e}{1 - e}.$$

Donc l'affirmation est fausse.

3. C'est vrai.

Ici: • f est dérivable et strictement croissante sur $[\,0 ; +\infty\,[$:

$$\forall\, x \in [\,0 ; +\infty\,[,\ f'(x) > 0.$$

• $\forall\, x \in [\,0 ; +\infty\,[$: $g(x) = e^{-f(x)}$.

g est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[\,0 ; +\infty\,[$.

Donc, g est dérivable sur $[\,0 ; +\infty\,[$ comme composée de 2 fonctions dérivables sur $[\,0 ; +\infty\,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in [\,0 ; +\infty\,[$.

Pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$: $g'(x) = -f'(x) \times e^{-f(x)}$.

Or: $f'(x) > 0$ et $e^{-f(x)} > 0$ pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$.

D'où: $\forall\, x \in [\,0\,;+\infty\,[$, $g'(x) < 0$ <=> g est strictement décroissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Donc l'affirmation est vraie.

4. C'est faux.

Soient:
- P_x, le prix du bien en 2000,
- P_y, le prix du bien en 2020, avec: $P_y = 1500000$ €,
- r, le taux d'augmentation du prix chaque année, avec: $r = 5\%$.

D'après le cours: $P_y = (1 + r)^n \times P_x \iff P_y = (1 + r)^{20} \times P_x$

$\iff 1500000 = (1,05)^{20} \times P_x$

$\implies P_x = \dfrac{1500000}{(1,05)^{20}}$

cad: $P_x \approx 565334$ €.

Au total, le prix du bien immobilier en 2000 est d'environ: 565334 € $\neq 53772$ €.

Donc l'affirmation est fausse.

5. C'est vrai.

Soit l'équation: (1) $3e^{2x} + 2 = 12\,e^x \iff 3\,(e^x)^2 - 12\,(e^x) + 2 = 0$

$\iff 3X^2 - 12X + 2 = 0$, **avec:** $X = e^x$.

$\Delta = 144 - 24 \implies \Delta = 120 > 0$, d'où 2 solutions dans $\mathbb{R}$ pour X.

• $X' = \dfrac{12 - \sqrt{120}}{6} > 0$, car: $\sqrt{120} < 12$ et donc: $X' \in]\,0\,;+\infty\,[$

• $X'' = \dfrac{12 + \sqrt{120}}{6} > 0$, et donc: $X'' \in]\,0\,;+\infty\,[$.

Dans ces conditions, l'équation (1) admet bien 2 solutions réelles:

- $x' = \ln(X')$
- $x'' = \ln(X'')$.

(avec: $X' \in]\,0\,;+\infty\,[$ et $X'' \in]\,0\,;+\infty\,[$)

Donc l'affirmation est vraie.

6. C'est vrai.

En effet: • la droite (d) a pour équation: $y = -\dfrac{3}{4}x - 1$

• le point $H\left(\dfrac{8}{5}; -\dfrac{11}{5}\right) \in (d)$ car: $-\dfrac{11}{5} = -\dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{5} - 1$.

• le point $F\,(0; -1) \in (d)$.

De plus: • la droite (Δ) passe par les points: $A\,(4; 1)$ et $H\left(\dfrac{8}{5}; -\dfrac{11}{5}\right)$.

Dans ces conditions: $\overrightarrow{FH} = \left(\dfrac{8}{5}; -\dfrac{6}{5}\right)$ et $\overrightarrow{AH} = \left(-\dfrac{12}{5}; -\dfrac{16}{5}\right)$.

Enfin, les droites (d) et (Δ) sont perpendiculaires car:

$$FH \cdot AH = \left(\frac{8}{5} \times -\frac{12}{5}\right) + \left(-\frac{6}{5} \times -\frac{16}{5}\right) \iff FH \cdot AH = 0.$$

Au total: • Le point $H \in (d)$ et le point $H \in (\Delta)$.

• Les droites (d) et (Δ) sont perpendiculaires en 1 point.

[ce point ne peut être que H]

Donc l'affirmation est vraie.

7. C'est faux.

La justification est évidente.

L'algorithme retourne: $5 \neq 6$.

Donc l'affirmation est fausse.

8. C'est vrai.

Ici: • $f(x) = (x^2 + x + 1)\, e^x$

• $Df = IR$.

• **Calcul de f':**

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(x) = x^2 + x + 1$ et $f_2(x) = e^x$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ".

Donc, f est dérivable sur IR comme produit **($f_1 \times f_2$)** de 2 fonctions dérivables sur IR.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in IR$.

Pour tout $x \in IR$: $f'(x) = (2x + 1) \times e^x + (x^2 + x + 1) \times e^x$

$\Rightarrow f'(x) = (x^2 + 3x + 2)\, e^x$.

• **L'équation de la tangente à la courbe de f au point $x = 1$:**

D'après le cours, elle s'écrit: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$\Longleftrightarrow \quad y - (3e) = (6e)\,(x - 1)$$

$$\Longrightarrow \quad y = (6e) \times x - 3e \quad (T).$$

• **Intersection entre la tangente (T) et l'axe des abscisses:**

(T) coupe l'axe des abscisses quand: $y = 0 \Longleftrightarrow 6x = 3$

$$\Longrightarrow \quad x = 0,5.$$

Donc l'affirmation est vraie.

9. **C'est vrai.**

Soient les événements: C = " la gélule est non conforme ", et $\overline{C}$ = " la gélule est conforme ".

On désigne par X le nombre de gélules non conformes sur 10 gélules prises au hasard.

Nous sommes en présence de 10 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de C suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 10$ et $p = 3\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B\,(10\,;\,3\%)$.

En fait, on répète 10 fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer: $P\,(X \leqslant 1)$.

[9 ou 10 gélules conformes = 0 ou 1 gélule non conforme].

Or: $P\,(X \leqslant 1) = P\,(X = 0) + P\,(X = 1)$

$$= \binom{10}{0} (3\%)^0 (97\%)^{10} + \binom{10}{1} (3\%)^1 (97\%)^9$$

$$\Rightarrow \; P(X \leqslant 1) \approx 96,5\%.$$

Au total, la probabilité demandée est d'environ: $96,5\% > 96\%$.

Donc l'affirmation est vraie.

10. **C'est faux.**

Pour le justifier, nous allons calculer l'espérance de Gains de Raphaël (G_R) et celle d'Aurélien (G_A) et nous retiendrons la plus élevée.

- **Espérance de gains de Raphaël:**

$E(G_R) = (1 \times 250) + (4 \times 50) + (25 \times 2) - (100 \times 1€)$

$$\Rightarrow \; E(G_R) = 400€.$$

- **Espérance de gains d'Aurélien:**

$E(G_A) = (5 \times 20) + (10 \times 15) + (15 \times 0) + (25 \times 5) - (100 \times 1€)$

$$\Rightarrow \; E(G_A) = 425€.$$

Comme: $E(G_A) > E(G_R)$, il est préférable de participer à la tombola d'Aurélien.

Donc l'affirmation est fausse.

PROBLÈME (12 points)

Microéconomie, 12e édition - Alain Piller
Analyse I, 2e édition - Alain Piller
Analyse II - Alain Piller
freemaths.fr: • Suites, T. S
• Fonctions, Intégrales, T. S

Partie A:

1. Déterminons à partir de quelle année le prix de l'once d'or dépassera le cours de 5000 dollars:

Soient:
- P_x, le prix de l'once d'or en janvier 2013,
- P_y, le prix de l'once d'or en janvier 2013 + n,
- r, le taux d'augmentation du prix chaque année, avec: $r = 19\%$.

D'après le cours: $P_y = (1 + r)^n \times P_x \iff P_y = (1,19)^n \times P_x$

$$\iff 5000 = (1,19)^n \times 1700$$

[car: $P_x = 1700\ \$$ et $P_y = 5000\ \$$]

$$\iff n \ln(1,19) = \ln\left(\frac{5000}{1700}\right)$$

$$\implies n = \frac{\ln\left(\frac{50}{17}\right)}{\ln(1,19)}$$

cad: $n \approx 6,201.$

Comme n est un entier naturel, nous prendrons: $n = 7$ ans.

Au total, le prix de l'once d'or dépassera 5000 \$ à partir de:

2020 (2013 + 7).

2. a. Identifions les courbes associées aux fonctions de coût et de recette:

D'après l'énoncé:
- Les coûts de production ont une croissance exponentielle.
- Le prix de vente (et donc la recette) est proportionnelle à la masse d'or contenu.

Or:
- la courbe C_2 a une allure exponentielle,
- la courbe C_1 est une droite (notion de " **proportionnel** ").

Donc:
- la courbe C_2 correspond à la fonction de coût,
- la courbe C_1 correspond à la fonction de recette.

2. b. Conjecturons le sens de variation de chacune des fonctions:

• La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la fonction associée à C_2 est:

" on pourrait, a priori, penser que cette fonction est strictement croissante ".

• La conjecture que nous pouvons émettre quant au sens de variation de la fonction associée à C_1 est:

" on pourrait, a priori, penser que cette fonction est strictement croissante ".

3. a. a1. Justification graphique:

L'entreprise a un bénéfice nul lorsque le coût de production est égal à la recette.

Le point A, d'abscisse α, qui vérifie un bénéfice nul est donc: le point d'intersection entre les courbes C_1 et C_2.

3. a. a2. Déduisons-en une équation vérifiée par α:

Soient:
- $C(x)$, la fonction dont la courbe représentative est C_2,
- $R(x)$, la fonction dont la courbe représentative est C_1.

Dans ces conditions: Bénéfice = 0 <=> Recette - Coûts = 0

<=> $R(x) - C(x) = 0$

=> $R(x) = C(x), \forall x \in [\, 1 ; +\infty \,[$.

Au total, il existe bien une masse d'or (α) pour laquelle le bénéfice de l'entreprise est nul et α vérifie: $R(\alpha) = C(\alpha)$.

3. b. Déterminons les masses d'or que les articles doivent contenir pour que l'entreprise réalise des bénéfices positifs:

Soit $\alpha = a$, la valeur trouvée précédemment.

Soit π, le profit ou bénéfice de l'entreprise: $\pi = R(x) - C(x)$.

Dans ces conditions, l'entreprise réalise des bénéfices positifs ssi:

$\pi > 0$ <=> $R(x) - C(x) > 0$ => $R(x) > C(x)$.

Graphiquement: $R(x) > C(x)$ ssi: $x \in [\, 1 ; \alpha \,[$ cad: $x \in [\, 1 ; a \,[$.

En d'autres termes, l'entreprise réalisera des bénéfices positifs tant que: la courbe C_1 sera située strictement au dessus de la courbe C_2 donc quand:

$$x \in [\, 1 ; \alpha \,[= [\, 1 ; a \,[.$$

En Microéconomie, α correspond au seuil de rentabilité de l'entreprise.

Partie B:

1. Déterminons la limite en $+\infty$ de la fonction φ:

Ici: • $\varphi(x) = e^{x-1} - \frac{1}{2} - x$.

• $D\varphi = [\ 1 ; +\infty\ [$.

Nous pouvons alors écrire: $\varphi(x) = e^{x-1} \times \left[1 - \frac{1}{2\ e^{x-1}} - \frac{x}{e^{x-1}} \right]$.

Or, d'après le Théorème des Croissances Comparées: " En $+\infty$, exponentielle croît plus vite que polynôme qui croît plus vite que logarithmique ".

D'où: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2\ e^{x-1}} = 0$,

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = 0$.

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{x-1}(1 - 0 - 0)$

$= +\infty$.

2. Déterminons le sens de variation de φ sur $[\ 1 ; +\infty\ [$:

• **Calcul de φ':**

Posons: $\varphi = f_1 + f_2$, avec: $f_1(x) = e^{x-1}$ et $f_2(x) = -x - \frac{1}{2}$.

f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[\ 1 ; +\infty\ [$.

Donc, φ est dérivable sur $[\, 1 ; +\infty \,[$ comme somme $(f_1 + f_2)$ de 2 fonctions dérivables sur $[\, 1 ; +\infty \,[$.

Ainsi, nous pouvons calculer φ' pour tout $x \in [\, 1 ; +\infty \,[$.

Pour tout $x \in [\, 1 ; +\infty \,[$: $\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$.

• **Tableau de variation de φ:**

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout $x \in [\, 1 ; +\infty \,[$.

• **1^er cas**: $\varphi'(x) = 0$.

$\varphi'(x) = 0 \iff e^{x-1} = e^0 \Rightarrow x = 1$.

• **2ème cas**: $\varphi'(x) < 0$.

$\varphi'(x) < 0 \iff e^{x-1} < e^0 \Rightarrow x < 1$. **(cas à rejeter car: $x \in [\, 1 ; +\infty \,[$)**

• **3ème cas**: $\varphi'(x) > 0$.

$\varphi'(x) > 0 \iff e^{x-1} > e^0 \Rightarrow x > 1$ ou $x \in \,]\, 1 ; +\infty \,[$.

Ainsi: • φ est croissante sur $[\, 1 ; +\infty \,[$.

• φ est strictement croissante sur $]\, 1 ; +\infty \,[$.

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

x	1		$+\infty$
φ'	0	$+$	
φ	a	$\nearrow$	b

Avec: • $a = \varphi(1) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$,

• $b = +\infty$, avec: $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

3. Déduisons que l'équation $C(x) = x$ admet une unique solution α:

Notons que: $C(x) = x \iff C(x) - x = 0 \iff \boldsymbol{\varphi(x) = 0}$.

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

Ici: • φ est continue sur $[1; +\infty[$.

• " **0** " de l'équation $\varphi(x) = \mathbf{0}$ est compris entre: $\varphi(a) = \varphi(1) = -\frac{1}{2}$

et: $\varphi(b) = \varphi(+\infty) = +\infty$.

• φ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution appartenant à $]1; +\infty[$.

Au total: $C(x) = x$ cad $\varphi(x) = 0$ admet exactement une unique solution α.

4. Montrons que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$:

Nous avons: • $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow \varphi\left(\frac{3}{2}\right) \approx -0,351 < 0$,

• $\varphi(2) = e - \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow \varphi(2) \approx 0,218 > 0$.

Ainsi: $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) < 0 < \varphi(2)$

$\iff \varphi\left(\frac{3}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi(2)$

$\Rightarrow \frac{3}{2} < \alpha < 2,$ car: φ est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

Au total, nous avons bien: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

Partie C:

1. Montrons que $C(x) = x \iff g(x) = x$:

$\forall\, x \in I$: $C(x) = x \iff e^{x-1} = \frac{1}{2} + x$

$\iff x - 1 = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$, avec: $x + \frac{1}{2} > 0$

car: $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

$\iff \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1 = x$

$\iff g(x) = x$.

Au total, pour tout $x \in I$: $C(x) = x \iff g(x) = x$.

2. a. a1. Justifions que g est croissante sur I:

Ici: • $g(x) = \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1$

• $Dg = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Pour tout $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$: $g'(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{2}{2x+1}$, avec: $x \neq -\frac{1}{2}$, car: $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Or sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$: $g'(x) > 0$.

Donc sur I: g est strictement croissante.

2. a. a2. Déduisons que pour tout réel $x \in I$, $g(x) \in I$:

Comme la fonction g est strictement croissante sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, elle prendra

ses valeurs dans l'intervalle $J = g(I)$ cad: $J = \left[g\left(\frac{3}{2}\right); g(2)\right]$.

Or: • $g\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(2) + 1 \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1,693$

• $g(2) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) + 1 \Rightarrow g(2) \approx 1,916$.

Au total: $J = [\,1,693\,;\,1,916\,] \in I$, et par conséquent: $g(x) \in I$.

2. b. Montrons que, pour tout $x \in I$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$:

$x \in I \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 2$

$\Leftrightarrow 2 \times \frac{3}{2} \leq 2x \leq 2 \times 2$

$\Leftrightarrow \left(2 \times \frac{3}{2}\right) + 1 \leq 2x + 1 \leq (2 \times 2) + 1$

$\Leftrightarrow 4 \leq 2x + 1 \leq 5$

$\Rightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{2}{2x+1} \leq \frac{2}{4}$ cad: $\frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Or: $\frac{2}{5} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

Au total: pour tout $x \in I$, $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$.

3. a. Montrons l'inéquation (1):

Nous avons, pour tout $x \in I$: $|g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$ (a), d'après l'énoncé.

Or: • $C(x) = x$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$, avec: $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

• $C(x) = x \iff g(x) = x$, pour tout $x \in I$.

Dans ces conditions, il existe une unique solution $\alpha \in I$ avec: $g(\alpha) = \alpha$.

D'où $\forall x \in I$: (a) $\Rightarrow |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

$\iff |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$.

Au total, pour tout $x \in I$, nous avons bien: $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$.

3. b. Calculons ω_2 et ω_3:

Nous avons: • $\omega_0 = \frac{3}{2}$,

• $\omega_1 \approx 1,693$.

D'où: • $\omega_2 \approx 1,785$,

• $\omega_3 \approx 1,827$.

Au total, nous avons: $\omega_2 \approx 1,785$ et $\omega_3 \approx 1,827$.

3. c. **Montrons par récurrence l'inégalité demandée, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:**

Préalablement, notons deux résultats:

- $\forall\, x \in [\,1\,; +\infty\,[,\ \frac{3}{2} < \alpha < 2.$
- $\forall\, x \in \left[\frac{3}{2}\,; 2\right], |\, g(x) - \alpha\,| \leqslant \frac{1}{2}\,|\, x - \alpha\,|.$

Nous allons montrer par récurrence que: " $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, \omega_n - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ".

Initialisation:

- $\omega_0 = \frac{3}{2}.$
- $\left|\frac{3}{2} - \alpha\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}$? cad: $\left|\frac{3}{2} - \alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}$?

oui car: $\alpha \in \left]\frac{3}{2}\,; 2\right[.$

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|\, \omega_n - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

et montrons qu'alors: $|\, \omega_{n+1} - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$

Supposons: $\underbrace{|\, \omega_n - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} \times |\, \omega_n - \alpha\,| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow |\, g(\omega_n) - \alpha\,| \leqslant \frac{1}{2}\,|\, \omega_n - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow |\, g(\omega_n) - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

$$\Rightarrow |\, \omega_{n+1} - \alpha\,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}.$$

Conclusion: $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, \omega_n - \alpha \,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$

3. d. Déduisons-en que la suite (ω_n) est convergente et déterminons sa limite:

- La suite (ω_n) est croissante et est majorée, elle est donc convergente.

- De plus: $|\, \omega_n - \alpha \,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \iff -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant \omega_n - \alpha \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$

Or:
- $\lim\limits_{n \to +\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0,$ car: $\frac{1}{2} \in \,]0\,;1[,$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0,$ car: $\frac{1}{2} \in \,]0\,;1[.$

Dans ces conditions, d'après le **théorème des gendarmes**, nous pouvons affirmer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n - \alpha = 0$ ce qui revient à dire que: $\lim\limits_{n \to +\infty} \omega_n = \alpha.$

Au total, la suite (ω_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente et converge vers $L = \alpha$.

4. Donnons un encadrement de α, d'amplitude 10^{-4}:

Nous savons que la suite (ω_n) est majorée par α.

D'où: $|\, \omega_n - \alpha \,| = \alpha - \omega_n$ car: $\forall\, n \in \mathbb{N}, \omega_n \leqslant \alpha.$

Ainsi: $|\, \omega_n - \alpha \,| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \iff 0 \leqslant \alpha - \omega_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$

Dans ces conditions, nous pouvons écrire: $\omega_n \leqslant \alpha \leqslant \omega_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$

Notons que " n " est tel que: $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leqslant 10^{-4}$

$$\Longleftrightarrow \quad (n+1)\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \ln(10^{-4})$$

$$\Longleftrightarrow \quad (n+1) \geqslant \frac{\ln(10^{-4})}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad \text{car: } \frac{1}{2} \in \,]0;1[$$

et donc: $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

$$\Longleftrightarrow \quad (n+1) \geqslant 4 \times \frac{\ln(10)}{\ln(2)}$$

$$\Longrightarrow \quad n \geqslant \left(4 \times \frac{\ln(10)}{\ln(2)}\right) - 1$$

$\Longrightarrow \quad n \geqslant 13$ car n est un entier naturel.

Au total, l'encadrement demandé est: $\omega_{13} \leqslant \alpha \leqslant \omega_{13} + \left(\frac{1}{2}\right)^{14}$.

Notons que: $\omega_{13} \leqslant \alpha \leqslant \omega_{13} + \left(\frac{1}{2}\right)^{14} \Longleftrightarrow 1,8776 \leqslant \alpha \leqslant 1,8777$.

5. Déterminons pour quelle masse d'or (à 10^{-2} près), l'entreprise réalisera un bénéfice nul:

A 10^{-2} près, la masse d'or demandée est d'environ: 18,78 grammes.